华章数学译丛

56

Algebraic Combinatorics

Walks, Trees, Tableaux, and More

代数组合论

游动、树、表及其他

[美] 理查德 P. 斯坦利 (Richard P. Stanley) 著

辛国策 周岳 译



Algebraic Combinatorics

Walks, Trees, Tableaux, and More

代数组合论

华　章　数　学　译　丛

56

Algebraic Combinatorics
Walks, Trees, Tableaux, and More

代数组合论
游动、树、表及其他

[美] 理查德 P. 斯坦利 著
(Richard P. Stanley)
辛国策 周岳 译



图书在版编目(CIP)数据

代数组合论:游动、树、表及其他 /(美)斯坦利(Stanley, R. P.)著;辛国策,周岳译.
—北京:机械工业出版社,2015.5
(华章数学译丛)
书名原文:Algebraic Combinatorics

ISBN 978-7-111-49782-0

I. 代… II. ①斯… ②辛… ③周… III. 代数-研究 IV. O15

中国版本图书馆 CIP 数据核字(2015)第 061625 号

本书版权登记号:图字:01-2013-7857

本书内容涉及图中的游动、Radon 变换、矩阵树定理、Sperner 性质、欧拉有向图、杨表、定向树等. 全书共 12 章,每一章都论述了组合数学领域里一个经典且有趣的主题,并且简要介绍了所述问题产生的历史背景、相关故事以及现有的应用领域. 章末精选了练习题,指出了相关问题进一步的发展方向,书后还附有部分练习题的解答提示. 书中还有 3 个章附录,介绍与各章内容相关的组合学的纯粹计数部分,即 RSK 算法、平面分拆、标号树的计数.

本书可作为高年级本科生一学期的"代数组合学"、"计数组合学"或"图论"的教材.

出版发行:机械工业出版社(北京市西城区百万庄大街 22 号 邮政编码:100037)

责任编辑:明永玲　　责任校对:殷 虹
印 刷:北京市荣盛彩色印刷有限公司　　版 次:2015 年 7 月第 1 版第 1 次印刷
开 本:186mm×240mm 1/16　　印 张:13
书 号:ISBN 978-7-111-49782-0　　定 价:49.00 元

凡购本书,如有缺页、倒页、脱页,由本社发行部调换
客服热线:(010)88378991 88361066　　投稿热线:(010)88379604
购书热线:(010)68326294 88379649 68995259　　读者信箱:hzjsj@hzbook.com

中文版序

I am very happy that my book *Algebraic Combinatorics* has been translated into Chinese. Now many of the pleasures of algebraic combinatorics will be more accessible to Chinese students. I hope that they will enjoy learning from this book and will be inspired to continue further in this area. I am grateful to Guoce Xin and Yue Zhou for the hard work that they did in creating this translation. (很高兴《代数组合论》一书翻译为中文. 现在中国学生可以更方便地了解代数组合中的许多有趣内容. 我希望他们喜欢学习这本书, 得到启发并深入这个领域. 在此感谢辛国策和周岳在翻译此书过程中所做的大量工作.)

Richard P. Stanley
2014 年 8 月 31 日
于麻省剑桥

译者序

本书作者 Richard P. Stanley 是美国国家科学院院士和美国艺术与科学院院士, 2006 年国际数学家大会一小时报告人, 是国际组合数学界的领袖人物之一, 现任美国麻省理工学院教授, 南开大学名誉教授. Stanley 教授所获奖项主要有 George Pólya 奖、Leroy P. Steele 奖、Rolf Schock 奖、Stanley 教授的论著简明深刻, 他所著的几本研究生教材已经成为国内外组合数学专业研究生必读的经典范本.

本书是美国高年级本科生教材, 是代数组合领域中目前唯一的本科生教材. 作者以广博的组合数学和代数知识, 将代数学中一些简单和基本的工具巧妙地应用到组合数学中, 从而极大地激发学生应用代数工具以及探索组合数学相关问题的兴趣. 本书主要内容包括图中的游动, 立方体, Randon 变换, 偏序集的 Sperner 性质, 杨表, 矩阵树定理以及组合数学中的一些“珍宝”. 该书每一章都论述了组合数学领域里一个经典且有趣的课题, 各章大多比较简短且相对独立. 每一章的最后都简要阐明了所述问题产生的历史背景、相关故事以及现有的应用领域, 并附上了参考文献. 最后精选的练习指出了相关问题进一步的发展方向. 这一切都会让刚掌握代数知识的学生感受到代数工具的强大力量和组合问题的迷人魅力, 读完每一章时都会感觉意犹未尽, 正如 Stanley 教授所说, 本书每一部分所阐述的内容都可以提供一扇通往更深奥的代数组合世界的大门. 学完本书后读者将会有强大的动力和信心在其最感兴趣的几个方面深入了解和探索下去.

两位译者都是以组合数学为主要研究方向, 对于能够翻译 Stanley 教授的教材深感荣幸. 就国内的实际情况而言, 本书最好用做研究生的教材. 对学习过线性代数的本科生来说, 本书可以看作是线性代数在组合学中的应用.

感谢 Stanley 教授及时和耐心地回复了我们的疑问. 感谢明永玲编辑对本书的排版和校对所做出的努力. 最后感谢国家自然科学基金 (No. 11171231, 11101435) 对本书出版的资助。

对 Stanley 教授挂在网上的截止到 2014 年 6 月 11 日的勘误, 本译文都做了相应的修改. 由于译者水平有限, 文中错误和疏漏在所难免, 敬请读者和同行不吝指正.

辛国策　周岳
2014 年 8 月 27 日

前言

本书主要是为美国本科生设计的关于代数组合学课程的一学期用教材. 本书的主要预备知识是域上的基础线性代数知识 (特征值、特征向量等)、有限域的存在性和群论的初等知识. 一个例外是 12.6 节, 其中涉及有理数域的有限扩张以及一点 Galois 理论. 具备组合数学的初级知识有助于理解本书但不是必需的.

为什么我要写一本关于代数组合学的本科生教材呢? 一个显然的原因是收集一些我认为非常有趣的资料并希望学生们认同. 第二个原因关系到学生, 他们学习了代数学入门课程并且想知道新学的知识可以做什么工作. 要求基本代数知识的本科生课程通常是近世代数或者如代数拓扑和代数几何那样的抽象课程. 代数组合学提供了传统代数主干道上的一条蹊径, 更为直观也更容易理解.

代数组合学是一个庞大的课题, 因此需要一些精心选择才有现在的教材. 一些主要结果 (例如弱 Erdős-Moser 定理和 de Bruijn 序列的计数) 的特色是它们的描述不涉及任何代数. 这样的结果很好地宣传了代数的力量和整个数学的统一性. 除最后一章外所有的内容都与图中的游动以及与之关联的线性变换有着模糊的联系. 最后一章是组合数学中一些不相关联的优美代数应用的大杂烩. 该章中的各小节相互独立, 并独立于本书的其他章节. 书中还有 3 个章附录: RSK 算法, 平面分拆, 标号树的计数. 这些附录侧重于组合计数方面, 并与相应章节内容密切相关. 几乎本书涵盖的所有内容都可以提供一扇通往更深入的代数组合研究课题的大门. 我们希望本书确实达到了此目的, 就是说, 启发读者更深入地挖掘代数和组合之间迷人的相互作用.

很多人对本书的写作有贡献, 但特别感谢 Christine Bessenrodt 和 Sergey Fomin 仔细阅读了前期手稿的部分内容.

Richard P. Stanley
于麻省剑桥

基本记号

$\mathbb{P}$	正整数集
$\mathbb{N}$	非负整数集
$\mathbb{Z}$	整数集
$\mathbb{Q}$	有理数集
$\mathbb{R}$	实数集
$\mathbb{C}$	复数集
$[n]$	对 $n \in \mathbb{N}$ 表示集合 $\{1, 2, \ldots, n\}$ (故 $[0] = \emptyset$)
$\mathbb{Z}_n$	模 n 整数群
$R[x]$	环 R 上关于变元 x 的多项式环
Y^X	对集合 X 和 Y, 表示所有函数 $f\colon X \to Y$ 构成的集合
$:=$	定义等于
$\mathbb{F}_q$	q 元有限域
(j)	$1 + q + q^2 + \cdots + q^{j-1}$
$\#S$ 或 $\|S\|$	有限集 S 的基数 (元素个数)
$S \dot\cup T$	集合 S 和 T 的无交并, 即 $S \cup T$, 其中 $S \cap T = \emptyset$
2^S	集合 S 的所有子集构成的集合, 又称幂集
$\binom{S}{k}$	S 的 k 元子集构成的集合
$\left(\!\binom{S}{k}\!\right)$	S 上的 k 元重集构成的集合
KS	域 K 上基为 S 的向量空间
B_n	$[n]$ 的所有子集构成的偏序集, 序为包含关系
$\rho(x)$	分次偏序集中元素 x 的秩
$[x^n]F(x)$	多项式或幂级数 $F(x)$ 中 x^n 的系数
$x \lessdot y$, $y \gtrdot x$	在偏序集 P 中 y 覆盖 x
δ_{ij}	Kronecker delta, 在 $i = j$ 时为 1, 其他情况为 0
$\|L\|$	对非负整数的数组 L, 表示 L 的分量 (元素) 和
$\ell(\lambda)$	分拆 λ 的长度 (分量个数)
$p(n)$	$n \geqslant 0$ 的分拆个数
$\ker\varphi$	线性变换或群同态的核
$\mathfrak{S}_n$	$1, 2, \ldots, n$ 的所有置换构成的对称群
ι	集合 X 的恒等置换, 即 $\iota(x) = x$ 对所有 $x \in X$ 成立

目录

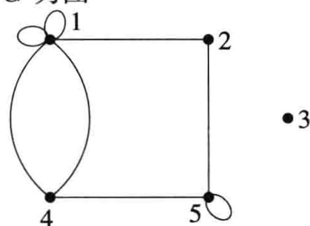
第1章　图中的游动

给定有限集 S 及整数 $k \geqslant 0$, 我们用 $\binom{S}{k}$ 表示 S 的 k 元子集所构成的集合. 有些不太正式地, 重集 (multiset) 可视为包含重复元素的集合, 例如 $\{1,1,3,4,4,4,6,6\}$. 我们仅关心每个元素出现的次数, 而不关心这些元素的次序. 因此如 $\{2,1,2,4,1,2\}$ 和 $\{1,1,2,2,2,4\}$ 是同一个重集: 它们都包含了两个 1, 三个 2, 一个 4 (且没有其他元素). 我们称重集 M 是在集合 S 上 (on S) 的, 如果 M 的每个元素都属于 S. 从而上例中的重集是在集合 $S=\{1,3,4,6\}$ 上的或在任何包含 S 的集合上的. 记 $\left(\binom{S}{k}\right)$ 为 S 上所有 k 元重集所构成的集合. 例如, 若 $S=\{1,2,3\}$, 则 (用简化记号)

$$\binom{S}{2}=\{12,13,23\},\quad \left(\binom{S}{2}\right)=\{11,22,33,12,13,23\}.$$

下面定义所谓的图. 直观地说, 图有顶点和边, 其中每条边 "连接" 两个 (允许相同) 顶点. 有可能两条不同的边 e 和 e' 连接相同的两个顶点. 要区分这样的两条边, 我们需要下面更确切的定义. 有限图 (graph) G 由顶点集 (vertex set) $V=\{v_1,\ldots,v_p\}$ 和边集 (edge set) $E=\{e_1,\ldots,e_q\}$, 以及一个函数 $\varphi\colon E\to\left(\binom{V}{2}\right)$ 组成. 约定若 $\varphi(e)=uv$ ($\{u,v\}$ 的简写), 则 e 连接 u 和 v 或等价地 e 与 u 和 v 关联 (incident) . 我们称顶点 u 和 v 是邻接的 (adjacent), 如果至少有一条边与 u 和 v 关联. 如果 $\varphi(e)=vv$, 则称 e 为 v 的自环 (loop). 如果一些边 $e_1,\ldots,e_j$ $(j>1)$ 满足 $\varphi(e_1)=\cdots=\varphi(e_j)=uv$, 就说 u 和 v 之间有重边 (multiple edge). 一个没有自环和重边的图称为简单图 (simple graph). 此时可以将 E 看作 $\binom{V}{2}$ 的子集 [为什么].

图 G 的邻接矩阵 (adjacency matrix) 是复数域上的 $p\times p$ 阶矩阵 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{A}(G)$, 其 (i,j)-元 a_{ij} 等于与 v_i 和 v_j 相关联的边的条数. 故 $\boldsymbol{A}$ 是一个实对称矩阵 (从而有实特征值), 其迹为 G 中自环的个数. 例如, 若 G 为图



则

$$
\boldsymbol{A}(G)=\begin{bmatrix}2&1&0&2&0\\1&0&0&0&1\\0&0&0&0&0\\2&0&0&0&1\\0&1&0&1&1\end{bmatrix}.
$$

图 G 中一个从 u 到 v 的长 (length)为 ℓ 的游动 (walk) 是一个序列

$$
v_1, e_1, v_2, e_2, \ldots, v_\ell, e_\ell, v_{\ell+1},
$$

满足:

- v_i 是 G 中的顶点;
- e_j 是 G 中的边;
- 对 $1 \leqslant i \leqslant \ell$, 边 e_i 的顶点是 v_i 和 v_{i+1};
- $v_1 = u$ 且 $v_{\ell+1} = v$.

1.1 定理　对任意整数 $\ell \geqslant 1$, 矩阵 $\boldsymbol{A}(G)^\ell$ 的 (i,j)-元等于 G 中从 v_i 到 v_j 的长为 ℓ 的游动的条数.

证明　这是矩阵乘法定义的直接推论. 令 $\boldsymbol{A}=(a_{ij})$. $\boldsymbol{A}(G)^\ell$ 的 (i,j)-元由下式给出

$$
(\boldsymbol{A}(G)^\ell)_{ij} = \sum a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{\ell-1} j},
$$

其中和式遍历所有满足 $1 \leqslant i_k \leqslant p$ 的序列 $(i_1, \ldots, i_{\ell-1})$. 但因为 a_{rs} 是 v_r 和 v_s 之间的边数, 所以上面和式中的项 $a_{ii_1} a_{i_1 i_2} \cdots a_{i_{\ell-1} j}$ 恰为从 v_i 到 v_j 的具有如下形式的长为 ℓ 的游动的条数 (可能为 0):

$$
v_i, e_1, v_{i_1}, e_2, \ldots, v_{i_{\ell-1}}, e_\ell, v_j
$$

(因为有 a_{ii_1} 种方式选择 e_1, $a_{i_1 i_2}$ 种方式选择 e_2, 等等.) 从而对所有的 $(i_1, \ldots, i_{\ell-1})$ 求和正好给出了所需的从 v_i 到 v_j 的长为 ℓ 的游动的条数. □

我们希望用定理 1.1 得到 $(\boldsymbol{A}(G)^\ell)_{ij}$ 的具体公式, 即 G 中从 v_i 到 v_j 的长为 ℓ 的游动数. 我们的公式要用到 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值. $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值也简称为 G 的特征值 (eigenvalue). 回顾一下，一个 $p \times p$ 阶实对称矩阵 M 有 p 个线性无关的实特征向量, 事实上这些向量可以选为标准正交的 (即单位长度的且正交的). 设 M 的实标准正交的特征向量为 $u_1, \ldots, u_p$, 其对应的特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. 若无特别说明, 所有向量 u 都将视为 $p \times 1$ 列 (column) 向量. 我们用 ^{t} 表示转置, 因此 u^t 是 $1 \times p$ 行 (row) 向量. 于是向量 u 和 v 的点积 (或标量积、

内积) 就是 $u^t v$ (正常矩阵乘法). 特别地, $u_i^t u_j = \delta_{ij}$ (Kronecker delta 记号[①]). 令 $U = (u_{ij})$ 表示以 $u_1, \ldots, u_p$ 为列向量的矩阵, 记为 $U = [u_1, \ldots, u_p]$. 因为 U 是正交矩阵, 所以

$$U^t = U^{-1} = \begin{bmatrix} u_1^t \\ \vdots \\ u_p^t \end{bmatrix}$$

是以 $u_1^t, \ldots, u_p^t$ 为行的矩阵. 由线性代数的理论可知, 矩阵 U 将 M 对角化 (diagonalize) , 即

$$U^{-1} M U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p),$$

其中 $\operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ 表示依次以 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ 为对角元的对角矩阵.

1.2 推论 在前面的图 G 中固定两个顶点 v_i 和 v_j. 设邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值为 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. 则存在实数 $c_1, \ldots, c_p$ 使得对任意 $\ell \geqslant 1$ 都有

$$\left(\boldsymbol{A}(G)^\ell\right)_{ij} = c_1 \lambda_1^\ell + \cdots + c_p \lambda_p^\ell. \tag{1.1}$$

事实上, 如果 $U = (u_{rs})$ 是满足 $U^{-1} \boldsymbol{A} U = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_p)$ 的实正交矩阵, 那么

$$c_k = u_{ik} u_{jk}.$$

证明 我们有 [为什么]

$$U^{-1} \boldsymbol{A}^\ell U = \operatorname{diag}(\lambda_1^\ell, \ldots, \lambda_p^\ell).$$

于是

$$\boldsymbol{A}^\ell = U \cdot \operatorname{diag}(\lambda_1^\ell, \ldots, \lambda_p^\ell) U^{-1}.$$

对等两边的 (i, j)-元 (并用等式 $U^{-1} = U^t$) 可得 [为什么]

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{ij} = \sum_k u_{ik} \lambda_k^\ell u_{jk},$$

得证. □

要应用推论 1.2 我们必须能够计算特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ 以及对角化矩阵 U (或特征向量 u_i). 但在一个有趣的特殊情形下, 我们无需计算 U. 图 G 的一个闭游动 (closed walk) 是一个起点与终点相同的游动. G 中从 v_i 出发的长为 ℓ 的闭游动的条数就是 $(\boldsymbol{A}(G)^\ell)_{ii}$, 因此长为 ℓ 的闭游动的总 (total) 条数 $f_G(\ell)$ 由下式给出

$$f_G(\ell) = \sum_{i=1}^{p} (\boldsymbol{A}(G)^\ell)_{ii}$$

---

① δ_{ij} 的值在 $i = j$ 时为 1, 其他情况为 0.——译者注

$$= \mathrm{tr}(\boldsymbol{A}(G)^{\ell}),$$

其中 tr 表示迹 (即主对角线上元素的和). 回顾一下，一个方阵的迹等于它的特征值的和. 若矩阵 M 有特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, 那么 [为什么] M^{ℓ} 就有特征值 $\lambda_1^{\ell}, \ldots, \lambda_p^{\ell}$. 因此我们证明了如下结果.

1.3 推论 如果 $\boldsymbol{A}(G)$ 有特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, 那么 G 中长为 ℓ 的闭游动的条数为

$$f_G(\ell) = \lambda_1^{\ell} + \cdots + \lambda_p^{\ell}.$$

到目前为止, 我们是在应用线性代数的各种方法和窍门来对图中的游动计数. 但有时我们也可以用组合的推理来对图中的游动计数, 而这样的结果可以反过来确定 G 的特征值. 作为第一个简单的例子, 考察完全图 (complete graph) K_p, 其顶点集为 $V = \{v_1, \ldots, v_p\}$, 且任意两个不同 (distinct) 的顶点之间都有一条边. 于是 K_p 有 p 个顶点, 有 $\binom{p}{2} = \frac{1}{2}p(p-1)$ 条边.

1.4 引理 令 J 表示 $p \times p$ 阶全 1 矩阵. 则 J 的特征值为 p (1 重) 和 0 ($p-1$ 重).

证明 由于所有的行都相等且非零, 秩 $(J) = 1$, 再由秩为 $p-m$ 的 $p \times p$ 矩阵至少有 m 个特征值等于 0, 可以推断 J 至少有 $p-1$ 个特征值等于 0. 因为 $\mathrm{tr}(J) = p$ 而迹是所有特征值的和, 所以 J 的剩余特征值就是 p. □

1.5 命题 完全图 K_p 的特征值有: 重数为 $p-1$ 的特征值 -1, 重数为 1 的特征值 $p-1$.

证明 我们有 $\boldsymbol{A}(K_p) = J - I$, 其中 I 表示 $p \times p$ 单位矩阵. 如果矩阵 M 的特征值为 $\mu_1, \ldots, \mu_p$, 那么 $M + cI$ (c 为常数) 的特征值就是 $\mu_1 + c, \ldots, \mu_p + c$ [为什么]. 由引理 1.4 得证. □

1.6 推论 完全图 K_p 中从顶点 v_i 出发的长为 ℓ 的闭游动的条数是

$$(\boldsymbol{A}(K_p)^{\ell})_{ii} = \frac{1}{p}((p-1)^{\ell} + (p-1)(-1)^{\ell}). \tag{1.2}$$

(注意这也是由数 $1, 2, \ldots, p$ 构成的序列 $(i_1, \ldots, i_{\ell})$ 的个数, 满足 $i_1 = i$, 任意两个相邻的数都不同, 且 $i_{\ell} \neq i_1$ [为什么].)

证明 由推论 1.3 和命题 1.5, K_p 中长为 ℓ 的闭游动的总条数为 $(p-1)^{\ell} + (p-1)(-1)^{\ell}$. 由图 K_p 的对称性, 从 v_i 出发的长为 ℓ 的闭游动的条数与 i 无关 (所有顶点 “看起来一样”). 因此将闭游动的总条数除以 p (顶点数) 即得所求结果. □

推论 1.6 的组合证明相当巧妙 (练习 1.1). 我们的代数证明则初显代数学在解决计数问题中的威力.

对 K_p 中一般游动应如何处理呢? 不难将矩阵 $\boldsymbol{A}(K_p)$ 具体地对角化 (或等价地, 计算特征向量), 但有一个更简单的特殊论证. 由二项式定理[①]可得

$$(J-I)^\ell=\sum_{k=0}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}J^k. \tag{1.3}$$

现在对 $k>0$ 有 $J^k=p^{k-1}J$ [为什么], 而 $J^0=I$. (J^0 的 "正确" 值事先 (priori) 并不清楚, 但为使等式 (1.3) 成立必须取 $J^0=I$.) 因此

$$(J-I)^\ell=\sum_{k=1}^{\ell}(-1)^{\ell-k}\binom{\ell}{k}p^{k-1}J+(-1)^\ell I.$$

再次应用二项式定理可得

$$(J-I)^\ell=\frac{1}{p}\big((p-1)^\ell-(-1)^\ell\big)J+(-1)^\ell I. \tag{1.4}$$

对 $i\neq j$ 对等两边 (i,j)-元可得

$$\big(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\big)_{ij}=\frac{1}{p}\big((p-1)^\ell-(-1)^\ell\big). \tag{1.5}$$

如果取 (1.4) 的 (i,i)-元就重新得到等式 (1.2). 注意一个有趣的事实: 如果 $i\neq j$ 那么

$$\big(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\big)_{ii}-\big(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\big)_{ij}=(-1)^\ell.$$

我们也可以用推论 1.6来推导 (1.5), 应用

$$\sum_{i=1}^{p}\sum_{j=1}^{p}\big(\boldsymbol{A}(K_p)^\ell\big)_{ij}=p(p-1)^\ell,$$

此即 K_p 中长为 ℓ 的游动的总条数. 细节留给读者完成.

接着我们来说明如何从等式 (1.2) 自身来确定 $\boldsymbol{A}(K_p)$ 的特征值. 因此, 如果我们可以证明 (1.2) 而无需先计算 $\boldsymbol{A}(K_p)$ 的特征值 (恰如在前两段中的做法), 那么就给出了计算特征值的另一种方法. 我们的论证原则上适用于任何图 G, 而不仅仅是 K_p. 先说一个简单的引理.

1.7 引理　设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_r$ 和 $\beta_1,\ldots,\beta_s$ 是非零复数, 并使得对任意正整数 ℓ 都有

$$\alpha_1^\ell+\cdots+\alpha_r^\ell=\beta_1^\ell+\cdots+\beta_s^\ell. \tag{1.6}$$

则 $r=s$ 且这些 α 恰是这些 β 的重排.

① 这里可以应用二项式定理是因为 I 和 J 可交换 (commute). 一般对没有交换性的 $p\times p$ 矩阵 A 和 B, 我们顶多可以说 $(A+B)^2=A^2+AB+BA+B^2$, 对更高幂次的情形类似.

证明 我们用生成函数 (generating function) 这一强大的工具. 令 x 为一个绝对值 (或模) 接近 0 的复数. 将式 (1.6) 乘以 x^ℓ 并对所有的 $\ell \geqslant 1$ 求和. 所得几何级数必然收敛, 且有

$$\frac{\alpha_1 x}{1-\alpha_1 x}+\cdots+\frac{\alpha_r x}{1-\alpha_r x}=\frac{\beta_1 x}{1-\beta_1 x}+\cdots+\frac{\beta_s x}{1-\beta_s x}. \tag{1.7}$$

这个等式对 (模) 足够小的复数成立. 通分可得一个多项式恒等式. 但如果两个关于 x 的多项式在无限多个点上相等, 那么它们是相同的多项式 [为什么]. 因此式 (1.7) 对所有 (all) 复数 x 成立 (忽略掉那些导致分母为零的 x 的值).

固定一个复数 $\gamma \neq 0$. 将式 (1.7) 乘以 $1-\gamma x$ 并令 $x \to 1/\gamma$. 左边化为等于 γ 的 α_i 的个数, 而右边化为等于 γ 的 β_j 的个数 [为什么]. 于是这两个数对所有 γ 都相等, 引理得证. □

1.8 例 设图 G 有 12 个顶点且 G 中长为 ℓ 的闭游动的条数等于 $3\cdot 5^\ell+4^\ell+2(-2)^\ell+4$. 那么由推论 1.3 和引理 1.7 [为什么] 可知 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值为 5, 5, 5, 4, −2, −2, 1, 1, 1, 1, 0, 0.

第 1 章注记

图的特征值与游动计数之间的联系被认为是 "民间传说". 图谱理论 (spectral graph theory) 研究各种与图相关的矩阵的谱 (特征值所构成的重集), 该课题起始于 1931 年对量子化学的研究. 第一篇数学论文由 L. Collatz 和 U. Sinogowitz 在 1957 年发表. 专著 Cvetković, Doob, and Sachs [22] 提供了很好的一般参考书目①. 关于该课题还有两本教材, 一本是 Cvetković, Rowlinson, and Simić [23], 另一本是 Brouwer and Haemers [13].

第 1 章练习

注 对有 (*) 标记的练习的处理请参见书末的 "部分练习提示".

1. (巧题) 给出推论 1.6的组合证明, 即 K_p 中某个顶点到其自身的长为 ℓ 的闭游动的条数是 $\frac{1}{p}((p-1)^\ell+(p-1)(-1)^\ell)$.
2. 假设图 G 有 15 个顶点且对任意 $\ell \geqslant 1$, G 中长为 ℓ 的闭游动的条数是 $8^\ell+2\cdot 3^\ell+3\cdot(-1)^\ell+(-6)^\ell+5$. 记 G' 为在图 G 中每个顶点添加一个自环 (该顶点处已有自环

① 所有引用文献都指向本书末的参考文献.

的除外) 所得到的图. 在图 G' 中有多少条长为 ℓ 的闭游动? (用线性代数的技巧. 也可以试试纯组合的方法.)

3. 具有顶点二部划分 (A,B) 的二部图 G 是一个以 A 和 B 的无交并 $A \cup B$ 为顶点集的图, 满足 G 中每一条边都关联一个 A 中顶点和一个 B 中顶点. 用游动计数的方法来说明 G 中的非零特征值成对 $\pm\lambda$ 出现.

   也可以用矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征多项式 $f(x)$ 来给出一个等价的描述. 回顾 $p \times p$ 矩阵 A 的特征多项式定义为 $\det(A - xI)$. 当前的练习就等价于说, 如果 G 是二部图, 那么 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征多项式 $f(x)$ 可以写为 $g(x^2)$ (若 G 有偶数个顶点) 或 $xg(x^2)$ (若 G 有奇数个顶点), 其中 $g(x)$ 是一个多项式.

   注　有时 $p \times p$ 矩阵 A 的特征多项式定义为 $\det(xI - A) = (-1)^p \det(A - xI)$. 我们采用定义 $\det(A - xI)$, 这使得其在 $x = 0$ 处的值等于 $\det A$.

4. 设 $r, s \geqslant 1$. 完全二部图 K_{rs} 有顶点 $u_1, u_2, \ldots, u_r, v_1, v_2, \ldots, v_s$, 且每个 u_i 和 v_j 之间都有一条边 (故共有 rs 条边).
   (a) 通过纯组合论证, 计算 K_{rs} 中长为 ℓ 的闭游动的条数.
   (b) 利用 (a) 推导 K_{rs} 的特征值.

5. (*) 设 H_n 是从完全二部图 K_{nn} 去掉 n 条顶点无交的边所得的图. 于是 H_n 有 $2n$ 个顶点和 $n(n-1)$ 条边, 每个顶点的度 (所关联的边的条数) 为 $n-1$. 证明 H_n 的特征值为 ± 1 (每个 $n-1$ 重) 和 $\pm(n-1)$ (每个 1 重).

6. 设 $n \geqslant 1$. 完全 p 部图 $K(n,p)$ 有顶点集 $V = V_1 \cup \cdots \cup V_p$ (无交并), 每个 $|V_i| = n$, 且对 $i \neq j$, V_i 中任一顶点与 V_j 中任一顶点都连一条边. (如果 $u, v \in V_i$ 那么没有边 uv.) 因此 $K(1,p)$ 就是完全图 K_p, 而 $K(n,2)$ 就是完全二部图 K_{nn}.
   (a) (*) 用推论 1.6 计算 $K(n,p)$ 中长为 ℓ 的闭游动的条数.
   (b) 利用 (a) 推导 $K(n,p)$ 的特征值.

7. 设 G 是有限简单图, 有特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. 用 $G(n)$ 表示将 G 中每个顶点 v 替换为 n 个顶点集 V_v 所得的图, 满足若 uv 是 G 的边, 则 V_u 中每个顶点与 V_v 中每个顶点都连一条边 (且没有更多的边). 例如, $K_p(n) = K(n,p)$. 用 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ 表示 $G(n)$ 的特征值.

8. 设 G 是 p 个顶点上的 (有限) 图. 记 G' 为如下所得的图: 在 G 的每个顶点 v 上添加一条与其关联的边 e_v, 而 e_v 的另一个顶点是一个新顶点 v'. 于是 G' 有 p 条新边和 p 个度为 1 的新顶点. 用组合或代数的方法证明: 如果 G 有特征值 λ_i, 那么 G' 有特征值 $(\lambda_i \pm \sqrt{\lambda_i^2 + 4})/2$. (代数证明比组合证明简单得多.)

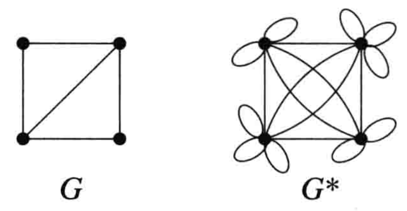
9. 设 G 是 (有限) 图, 它具有顶点 $v_1, \ldots, v_p$ 和特征值 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$. 我们知道对任意 i, j 有实数 $c_1(i,j), \ldots, c_p(i,j)$ 使得对所有 $\ell \geqslant 1$,

$$\left(\boldsymbol{A}(G)^{\ell}\right)_{ij}=\sum_{k=1}^{p}c_k(i,j)\lambda_k^{\ell}.$$

(a) 证明 $c_k(i,i)\geqslant 0$.

(b) 证明 $i\neq j$ 时可以有 $c_k(i,j)<0$. (最简单的例子就可以证明.)

10. 设 G 是有限图, 它具有特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$. 用 G^* 表示与 G 的顶点集相同的图, 但在顶点 u 和 v (包含 $u=v$) 之间有 $\eta(u,v)$ 条边, 其中 $\eta(u,v)$ 是 G 中从 u 到 v 的长为 2 的游动的条数. 例如,



用 G 的特征值表示 G^* 的特征值.

11. (*) 用 K_n^o 表示在 n 个顶点的完全图的每个顶点添加一个自环所得的图. (从而 $\boldsymbol{A}(K_n^o)=J_n$, 就是 $n\times n$ 全 1 矩阵, 并且 K_n^o 有 $\binom{n+1}{2}$ 条边.) 用 $K_n^o-K_m^o$ 表示在 K_n^o 中去掉 K_m^o 的所有边所得的图, 即选 K_n^o 的 m 个顶点, 并去掉这些顶点之间的所有边 (包含自环). (于是 $K_n^o-K_m^o$ 有 $\binom{n+1}{2}-\binom{m+1}{2}$ 条边.) 计算图 $\Gamma=K_{21}^o-K_{18}^o$ 中长为 $\ell\geqslant 1$ 的闭游动的条数 $C(\ell)$.

12. (a) 设 G 是有限图, Δ 为 G 中顶点的最大度. 记邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$ 的最大特征值为 λ_1. 证明 $\lambda_1\leqslant\Delta$.

    (b) (*) 假设 G 是有 q 条边的简单图 (无自环或重边). 证明 $\lambda_1\leqslant\sqrt{2q}$.

13. 设 G 是有至少两个顶点的有限图. 假设对某个 $\ell\geqslant 1$, 任意两顶点 u,v (包含 $u=v$) 之间的长为 ℓ 的游动数都是奇数. 证明存在非空顶点子集 S 使得 S 有偶数个元素, 而且 G 的任意顶点 v 都与 S 中的偶数个顶点相连. (顶点 v 与自己相连当且仅当 v 处有自环.)

第 2 章　立方体和 Radon 变换

我们现在考虑图 G 中一个更为有趣的例子, 它的特征值有很多应用. 用 $\mathbb{Z}_2$ 表示 2 阶循环群, 其元素为 0 和 1, 群运算为模 2 的加法. 因此 $0+0=0, 0+1=1+0=1, 1+1=0$. 用 $\mathbb{Z}_2^n$ 表示 $\mathbb{Z}_2$ 与它本身的 n 次直积, $\mathbb{Z}_2^n$ 的元素则为 0 和 1 组成的 n 元组 $(a_1,\ldots,a_n)$, 而群运算为逐位相加的加法. 定义如下一个称为 n *维立方体* (cube) 的图 C_n: C_n 的顶点集为 $V(C_n)=\mathbb{Z}_2^n$, 两顶点 u 和 v 之间有一条边当且仅当它们恰有一个坐标不同, 也就是说, $u+v$ 恰有一个坐标非 0. 若将 $\mathbb{Z}_2^n$ 看做是由实 (real) 向量组成的, 则这些向量构成了一个 n 维立方体的顶点集. 此外, 立方体的两个顶点处于一条边上 (在通常的几何意义下) 当且仅当它们构成了 C_n 的一条边. 这就解释了为什么 C_n 被称为 n 维立方体. 我们同样能看到 C_n 中的游动有很好的几何解释——它们是沿 n 维立方体的边上的游动.

要明确地得到 C_n 的特征值和特征向量, 我们将采用有限 Radon 变换这一不那么直接但非常有用和强大的方法. 用 $\mathcal{V}$ 表示所有函数 $f\colon \mathbb{Z}_2^n\to\mathbb{R}$ 的集合, 其中 $\mathbb{R}$ 表示实数域.① 注意 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}$ 上的 2^n 维向量空间 [为什么]. 若 $u=(u_1,\ldots,u_n)$ 和 $v=(v_1,\ldots,v_n)$ 是 $\mathbb{Z}_2^n$ 的元素, 则定义它们的*点积* (dot product) 为

$$u\cdot v=u_1v_1+\cdots+u_nv_n, \tag{2.1}$$

其中的运算都为模 2 运算. 因此可将 $u\cdot v$ 看做是 $\mathbb{Z}_2$ 中的元素. 根据 $u\cdot v=0$ 或 1, 将 $(-1)^{u\cdot v}$ 分别定义为实数 (real number) $+1$ 或 -1. 因为 $(-1)^k$ 的值仅依赖于整数 k (模 2), 所以我们可将 u 和 v 看做是整数向量而不会影响 $(-1)^{u\cdot v}$ 的值. 因此, 例如, 像如下这种公式

$$(-1)^{u\cdot(v+w)}=(-1)^{u\cdot v+u\cdot w}=(-1)^{u\cdot v}(-1)^{u\cdot w}$$

就是定义良好且有效的. 从一个更代数的角度来看, 映射 $\mathbb{Z}\to\{-1,1\}$ 将 n 映射到 $(-1)^n$ 是一个群同态, 这里在 $\{-1,1\}$ 上的乘积当然就是乘法.

现在定义向量空间 $\mathcal{V}$ 中两组重要的基. 对应于每一个 $u\in\mathbb{Z}_2^n$ 在每组基中都有一个基元. 第一组基用 B_1 来表示, 其基元 f_u 定义如下:

$$f_u(v)=\delta_{uv}, \tag{2.2}$$

---

① 对非 $\mathbb{Z}_2^n$ 的交换群, 有必要用复数而不是实数. 这里可以用复数, 但不需要这么做.

其中 δ_{uv} 为 Kronecker delta. 很容易看到 B_1 是一组基, 因为任意的 $g \in \mathcal{V}$ 都满足

$$g = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} g(u) f_u \tag{2.3}$$

[为什么]. 因此 B_1 生成了 $\mathcal{V}$, 又由 $\#B_1 = \dim \mathcal{V} = 2^n$ 可得 B_1 是一组基. 第二组基用 B_2 来表示, 基元 χ_u 定义为:

$$\chi_u(v) = (-1)^{u \cdot v}.$$

为了证明 B_2 也是一组基, 需要用到 $\mathcal{V}$ 上如下定义的内积 (表示为 $\langle \cdot, \cdot \rangle$):

$$\langle f, g \rangle = \sum_{u \in \mathbb{Z}_2^n} f(u) g(u).$$

注意到这个内积正好是关于基 B_1 的通常点积.

2.1 引理 集合 $B_2 = \{\chi_u : u \in \mathbb{Z}_2^n\}$ 构成了 $\mathcal{V}$ 的一组基.

证明 因为 $\#B_2 = \dim \mathcal{V}\ (= 2^n)$, 所以只需要证明 B_2 是线性无关的. 事实上, 我们将证明 B_2 中的元素是正交的[①]. 我们有

$$\begin{aligned}\langle \chi_u, \chi_v \rangle &= \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} \chi_u(w) \chi_v(w) \\ &= \sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{(u+v) \cdot w}.\end{aligned}$$

我们留给读者一个简单的练习来证明下面的公式. 对任意的 $y \in \mathbb{Z}_2^n$ 有

$$\sum_{w \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{y \cdot w} = \begin{cases} 2^n, & \text{当 } y = \mathbf{0}, \\ 0, & \text{否则}, \end{cases}$$

其中 $\mathbf{0}$ 表示 $\mathbb{Z}_2^n$ 的单位元 (向量 $(0, 0, \ldots, 0)$). 从而 $\langle \chi_u, \chi_v \rangle \neq 0$ 当且仅当 $u + v = \mathbf{0}$, 即 $u = v$, 这样 B_2 的元素是正交的 (且非零的). 因此它们是线性无关的. □

现在可以给出 Radon 变换的关键定义了.

给定 $\mathbb{Z}_2^n$ 的子集 Γ 和函数 $f \in \mathcal{V}$, 定义一个新函数 $\Phi_\Gamma f \in \mathcal{V}$ 为:

$$\Phi_\Gamma f(v) = \sum_{w \in \Gamma} f(v + w).$$

函数 $\Phi_\Gamma f$ 就称为 f (在群 $\mathbb{Z}_2^n$ 上关于其子集 Γ) 的 (离散 (discrete) 或有限 (finite)) Radon 变换 (transform).

① 回顾在线性代数中, 一个实向量空间中的非零正交向量组是线性无关的.

我们定义了一个映射 $\Phi_\Gamma\colon \mathcal{V}\to\mathcal{V}$. 容易看到 Φ_Γ 是一个线性变换, 我们希望计算出它的特征值和特征向量.

2.2 定理 Φ_Γ 的特征向量是函数组 χ_u, 其中 $u\in\mathbb{Z}_2^n$. 对应于 χ_u 的特征值 λ_u (即 $\Phi_\Gamma\chi_u=\lambda_u\chi_u$) 是

$$\lambda_u=\sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}.$$

证明 令 $v\in\mathbb{Z}_2^n$. 则

$$\begin{aligned}\Phi_\Gamma\chi_u(v)&=\sum_{w\in\Gamma}\chi_u(v+w)\\&=\sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot(v+w)}\\&=\left(\sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}\right)(-1)^{u\cdot v}\\&=\left(\sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}\right)\chi_u(v).\end{aligned}$$

因此

$$\Phi_\Gamma\chi_u=\left(\sum_{w\in\Gamma}(-1)^{u\cdot w}\right)\chi_u.$$

□

注意到因为根据引理 2.1, χ_u 构成了 $\mathcal{V}$ 的一组基, 所以定理 2.2 得到了 Φ_Γ 所有的特征值和特征向量. 同样注意到 Φ_Γ 的特征向量 χ_u 与 Γ 无关, 仅特征值是依赖于 Γ 的.

现在可以得到主要结果了. 设 $\Delta=\{\delta_1,\ldots,\delta_n\}$, 其中 δ_i 是第 i 个单位坐标向量 (即 δ_i 的第 i 个位置是 1 而其他位置都是 0). 注意到 δ_i 的第 j 个坐标正好是 δ_{ij} (Kronecker delta), 这就是我们用 δ_i 这个记号的原因. 用 $[\Phi_\Delta]$ 表示线性变换 $\Phi_\Delta\colon\mathcal{V}\to\mathcal{V}$ (关于由 (2.2) 给出的 $\mathcal{V}$ 的基 B_1) 的矩阵.

2.3 引理 若 $\boldsymbol{A}(C_n)$ 为 n 维立方体的邻接矩阵, 则 $[\Phi_\Delta]=\boldsymbol{A}(C_n)$.

证明 设 $v\in\mathbb{Z}_2^n$. 我们有

$$\begin{aligned}\Phi_\Delta f_u(v)&=\sum_{w\in\Delta}f_u(v+w)\\&=\sum_{w\in\Delta}f_{u+w}(v),\end{aligned}$$

上式是因为 $u=v+w$ 当且仅当 $u+w=v$. 因此

$$\Phi_\Delta f_u=\sum_{w\in\Delta}f_{u+w}. \tag{2.4}$$

等式 (2.4) 说明矩阵 $[\Phi_\Delta]$ 的 (f_u, f_v)-元 (简记为 (u,v)-元) 由下式给出

$$(\Phi_\Delta)_{uv} = \begin{cases} 1, & 若\ u+v \in \Delta, \\ 0, & 否则. \end{cases}$$

$u+v \in \Delta$ 当且仅当 u 和 v 仅有一个坐标不同. 这正好是 uv 作为 C_n 的边的条件. 得证! □

2.4 推论　$\boldsymbol{A}(C_n)$ 的特征向量 (看做是 C_n 的顶点的线性组合, 即 $\mathbb{Z}_2^n$ 的元素) E_u $(u \in \mathbb{Z}_2^n)$ 由下式给出

$$E_u = \sum_{v \in \mathbb{Z}_2^n} (-1)^{u \cdot v} v. \tag{2.5}$$

对应于 E_u 的特征值是

$$\lambda_u = n - 2\omega(u), \tag{2.6}$$

其中 $\omega(u)$ 是 u 中 1 的数目. (整数 $\omega(u)$ 称为 Hamming 权 (weight) 或者简称为 u 的权 (weight).) 因此对 $0 \leqslant i \leqslant n$, $\boldsymbol{A}(C_n)$ 有 $\binom{n}{i}$ 个特征值等于 $n-2i$.

证明　根据 (2.3), 对任意的函数 $g \in \mathcal{V}$ 有

$$g = \sum_v g(v) f_v.$$

对 $g = \chi_u$ 应用上式, 可得

$$\chi_u = \sum_v \chi_u(v) f_v = \sum_v (-1)^{u \cdot v} f_v. \tag{2.7}$$

等式 (2.7) 将 Φ_Δ (甚至 Φ_Γ, $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}_2^n$) 的特征向量 χ_u 表示成了函数 f_v 的线性组合. 但是 Φ_Δ 关于基 f_v 的矩阵与 $\boldsymbol{A}(C_n)$ 关于 C_n 的顶点 v 的矩阵相同. 因此 Φ_Δ 的特征向量关于 f_v 的展开式的系数与 $\boldsymbol{A}(C_n)$ 的特征向量关于 v 的展开式的系数相同, 这样就得到了等式 (2.5).

根据定理 2.2, 对应于 Φ_Δ 的特征向量 χ_u (或等价地, $\boldsymbol{A}(C_n)$ 的特征向量 E_u) 的特征值为

$$\lambda_u = \sum_{w \in \Delta} (-1)^{u \cdot w}. \tag{2.8}$$

现在 $\Delta = \{\delta_1, \ldots, \delta_n\}$, 且 $\delta_i \cdot u$ 在 u 的第 i 个坐标为 1 时等于 1 , 否则就等于 0. 因此 (2.8) 的和式中有 $n-\omega(u)$ 项等于 $+1$ 且有 $\omega(u)$ 项等于 -1, 这样 $\lambda_u = (n-\omega(u)) - \omega(u) = n - 2\omega(u)$. □

我们得到了计算 C_n 中游动数所需的全部信息.

2.5 推论 设 $u,v\in\mathbb{Z}_2^n$, 且 $\omega(u+v)=k$ (即 u 和 v 恰有 k 个坐标不同). 则在 C_n 中 u 与 v 之间长为 ℓ 的游动数为

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{uv}=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{k}(-1)^j\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}(n-2i)^\ell, \tag{2.9}$$

其中, 如果 $j>i$ 取 $\binom{n-k}{i-j}=0$. 特别地,

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{uu}=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^\ell. \tag{2.10}$$

证明 设 E_u 和 λ_u 如推论 2.4 中定义. 为了应用推论 1.2, 特征向量需要化为单位 (unit) 长度 (这里我们视 f_v 为 $\mathcal{V}$ 中的标准正交基). 由等式 (2.5), 可得

$$|E_u|^2=\sum_{v\in\mathbb{Z}_2^n}\left((-1)^{u\cdot v}\right)^2=2^n.$$

因此将 E_u 替换成 $E'_u=\frac{1}{2^{n/2}}E_u$ 就得到了一组标准正交基. 根据推论 1.2, 可得

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{uv}=\frac{1}{2^n}\sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n}E_{uw}E_{vw}\lambda_w^\ell.$$

由定义, E_{uw} 是展开式 (2.5) 中 f_w 的系数, 即 $E_{uw}=(-1)^{u\cdot w}$ (类似的结果对 E_v 也成立), 而 $\lambda_w=n-2\omega(w)$. 因此

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{uv}=\frac{1}{2^n}\sum_{w\in\mathbb{Z}_2^n}(-1)^{(u+v)\cdot w}\big(n-2\omega(w)\big)^\ell. \tag{2.11}$$

Hamming 权为 i, 且与 $u+v$ 有 j 个公共 1 的向量 w 的个数为 $\binom{k}{j}\binom{n-k}{i-j}$, 因为在 $u+v$ 中选择 j 个 1 与 w 共有的方法有 $\binom{k}{j}$ 种, 而 w 剩下的 $i-j$ 个 1 插入 $n-k$ 个剩余位置中的方法为 $\binom{n-k}{i-j}$ 种. 因为 $(u+v)\cdot w\equiv j\,(\mathrm{mod}\,2)$, 和式 (2.11) 就化简为式 (2.9). 显然在式 (2.9) 中令 $u=v$ 就得到了式 (2.10). 得证! □

可以给出等式 (2.10) 的一个避免线性代数的直接证明, 但我们不在这里做了. 因此由推论 1.3 和引理 1.7 (正如对 K_n 所做的一样) 可以得到另一种确定 C_n 的特征值的方法. 通过稍稍的努力也能得到等式 (2.9) 的一个直接证明. 在之后的例 9.12 中, 应用 C_n 的特征值将得到一个组合结果, 而这一结果的非代数证明只是最近才被发现并且是决不简单的.

2.6 例 在 (2.9) 中令 $k=1$ 可得

$$(\boldsymbol{A}^\ell)_{uv}=\frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\left[\binom{n-1}{i}-\binom{n-1}{i-1}\right](n-2i)^\ell$$

$$= \frac{1}{2^n} \sum_{i=0}^{n-1} \binom{n-1}{i} \frac{(n-2i)^{\ell+1}}{n-i}.$$

注 (对那些熟悉有限群表示论的读者)　函数 $\chi_u : \mathbb{Z}_2^n \to \mathbb{R}$ 正好是群 $\mathbb{Z}_2^n$ 的不可约 (复) 特征, 且在引理 2.1 的证明中展现的 χ_u 的正交性是有限群不可约特征通常的正交关系. 本章的结果很容易推广到任意有限阿贝尔群上. 练习 2.5 做的是 n 阶循环群 $\mathbb{Z}_n$ 的情形. 对非阿贝尔有限群情况就复杂多了, 因为并不是所有的不可约表示都是一次的 (即是 $G \to \mathbb{C}^*$ 的同态, $\mathbb{C}^*$ 为 $\mathbb{C}$ 中的乘法群), 且并不存在像阿贝尔群时所得到的确切公式.

在任意群下的情形我们可以进行如下的一点尝试. 设 G 是一个有限群, $\boldsymbol{M}(G)$ 为它的乘法表. 将 $\boldsymbol{M}(G)$ 的元素看做是可交换 (commuting) 的不定元, 这样 $\boldsymbol{M}(G)$ 就是一个有不定元的矩阵. 例如, 若 $G = \mathbb{Z}_3$. 设 G 中元素为 a, b, c, 其中 a 为单位元. 那么

$$\boldsymbol{M}(G) = \begin{bmatrix} a & b & c \\ b & c & a \\ c & a & b \end{bmatrix}.$$

我们能得出 $\det \boldsymbol{M}(G) = (a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$, 其中 $\omega = e^{2\pi i/3}$. 总的来说, 当 G 是阿贝尔群时, Dedekind 发现 $\det \boldsymbol{M}(G)$ 能分解成 $\mathbb{C}$ 上特定的线性因子. 定理 2.2 就等价于对群 $G = \mathbb{Z}_2^n$ 的表述 [为什么]. 等式 (12.5) 给出了当 $G = \mathbb{Z}_n$ 时的分解式. (为了能将 $\boldsymbol{M}(\mathbb{Z}_n)$ 转化成等式 (12.5) 中的循环矩阵, 对每一个 $w \in G$ 需要将按群元素 w 排列的行换成按 w^{-1} 排列的行, 但这些操作仅影响行列式的符号.) Dedekind 向 Frobenius 询问过 $\det \boldsymbol{M}(G)$ 的分解, 这一行列式称为非阿贝尔有限群 G 的群行列式 (group determinant). 例如, 若 $G = \mathfrak{S}_3$ (1, 2, 3 的全排列所构成的对称群), 其元素 (按圈记号) 为 $a = (1)(2)(3)$, $b = (1,2)(3)$, $c = (1,3)(2)$, $d = (1)(2,3)$, $e = (1,2,3)$, $f = (1,3,2)$. 那么 $\det \boldsymbol{M}(G) = f_1 f_2 f_3^2$, 其中

$$\begin{aligned} f_1 &= a+b+c+d+e+f, \\ f_2 &= -a+b+c+d-e-f, \\ f_3 &= a^2-b^2-c^2-d^2+e^2+f^2-ae-af+bc+bd+cd-ef. \end{aligned}$$

Frobenius 证明了一般情况下存在不可约齐次多项式 f (次数为 d_f) 的集合 $\mathcal{P}$, 其中 $\#\mathcal{P}$ 是 G 中共轭类的数目, 有

$$\det \boldsymbol{M}(G) = \prod_{f \in \mathcal{P}} f^{d_f}.$$

注意到取等式两端的次数可得 $\#G = \sum_f d_f^2$. Frobenius 的这一结果是他发展的群表示论里一个非常精彩的部分. d_f 正好就是 G 中不可约 (复) 表示的次数. 就对称群 $\mathfrak{S}_n$ 而言, 这些次数就是定理 8.1 中的数 f^λ, 并且第8章的附录 1 给出了 $\sum_\lambda (f^\lambda)^2 = n!$ 的一个双射证明.

第 2 章注记

Radon 变换最早产生于 J. K. A. Radon 的文章 [90] 中的一个连续设定, 现在它被应用在一些如电子化断层摄影术的领域. 有限的情形最初由 E. Bolker [9] 所定义. 在组合数学中进一步的应用参见 J. Kung [67]. n 维立方体 $\mathbb{Z}_2^n$ 上的 Radon 变换见 P. Diaconis and R. Graham [28]. 推广到 $\mathbb{Z}_k^n$ 的情形见 M. DeDeo and E. Velasquez [27].

对 Frobenius 和其他一些先行者发展起来的群表示论的详细阐述见 Hawkins 的综述文章 [54, 55, 56].

第 2 章练习

1. (a) 开始时 n 个硬币正面朝上. 随机地选取一枚 (每个都等可能地) 并且将它翻转. 这样一共做 ℓ 次. 问所有硬币都正面朝上的概率是多少?(解决这个问题不要从头开始, 而要用到之前的结论.)

   (b) 同 (a), 而现在要计算的是所有硬币都反面朝上的概率.

   (c) 同 (a), 但现在一次翻转两枚硬币.

2. (a) (困难) (*) 设 $k \leqslant n/2$. 记 $\mathcal{C}_{n,k}$ 为立方体 $\mathcal{C}_n$ 中有 $k-1$ 个 1 或 k 个 1 的所有顶点生成的子图 (这样 $\mathcal{C}_{n,k}$ 的边是由 $\mathcal{C}_n$ 中连接 $\mathcal{C}_{n,k}$ 的顶点的边组成, 共有 $k\binom{n}{k}$ 条边). 证明 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}(\mathcal{C}_{n,k})$ 的特征多项式为

$$\det(\boldsymbol{A} - xI) = \pm x^{\binom{n}{k}-\binom{n}{k-1}} \prod_{i=1}^{k} \left(x^2 - i(n-2k+i+1)\right)^{\binom{n}{k-i}-\binom{n}{k-i-1}},$$

   其中取 $\binom{n}{-1} = 0$.

   (b) 计算 $\mathcal{C}_{n,k}$ 中从一个固定的顶点 v 到它本身长为 ℓ 的闭游动数.

3. (未解决的, 也与本书无关) 若 $n = 2k+1$. 问上述练习 2 中的图 $\mathcal{C}_{n,k+1}$ 中是否存在一个 Hamilton 圈, 即一条包含每个顶点仅一次的闭路径? 图 G 中的一条闭路径 (closed path) 就是除最后一步外不重复任意顶点的闭游动.

4. 设图 G 的顶点集为 $\mathbb{Z}_2^n$ (和 n 维立方体一样), 其边集的定义如下: 如果 u 和 v 恰有两个 (two) 坐标不同 (即若 $\omega(u,v) = 2$), 那么 $\{u,v\}$ 是 G 的一条边. 求 G 的特征值.

5. 本练习是专门讨论图 Z_n 的, 其顶点集为 $\mathbb{Z}_n$ (n 阶循环群, 以 $0, 1, \ldots, n-1$ 为元素, 以模 n 的加法为二元运算所构成的群), 边由所有的数对 $\{i, i+1\}$ ($i+1$ 在 $\mathbb{Z}_n$ 中计

算, 这样 $(n-1)+1=0$) 组成. 图 Z_n 被称为 n-圈 (cycle). 类似对 n 维立方体 C_n 所做的, 我们将要得到 $\mathbb{Z}_n$ 的邻接矩阵的一些性质. 有必要在复数 $\mathbb{C}$ 上来工作. 回顾一下, 恰有 n 个复数 z (称为 n 次单位根) 满足 $z^n=1$. 它们是 $\zeta^0=1, \zeta^1=\zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{n-1}$, 其中 $\zeta=\mathrm{e}^{2\pi i/n}$.

(a) 画出 Z_3, Z_4 和 Z_5 的图.

(b) 设 $\mathcal{V}$ 为所有函数 $f\colon \mathbb{Z}_n \to \mathbb{C}$ 构成的复向量空间. 求 $\mathcal{V}$ 的维数.

(c) (*) 若 $k \in \mathbb{Z}$, 那么注意到 ζ^k 仅与 k 模 n 的值有关. 因此若, $u \in \mathbb{Z}_n$, 那么我们可以将 u 视为普通的整数来定义 ζ^u , 而对指数的常用法则如 $\zeta^{u+v}=\zeta^u\zeta^v$ (其中 $u, v \in \mathbb{Z}_n$) 仍然成立. 对 $u \in \mathbb{Z}_n$ 定义 $\chi_u \in \mathcal{V}$ 为 $\chi_u(v)=\zeta^{uv}$. 令 $B=\{\chi_u\colon u \in \mathbb{Z}_n\}$. 证明 B 是 $\mathcal{V}$ 的一组基.

(d) 给定 $\Gamma \subseteq \mathbb{Z}_n$ 和 $f \in \mathcal{V}$, 定义 $\Phi_\Gamma f \in \mathcal{V}$ 为

$$\Phi_\Gamma f(v)=\sum_{w \in \Gamma} f(v+w).$$

证明 Φ_Γ 的特征向量为函数 χ_u, 对应的特征值为 $\lambda_u=\sum_{w\in\Gamma}\zeta^{uw}$.

(e) 设 $\Delta=\{1, n-1\} \subseteq \mathbb{Z}_n$. 定义 $f_u \in \mathcal{V}$ 为 $f_u(v)=\delta_{uv}$. 令 $F=\{f_u\colon u \in \mathbb{Z}_n\}$. 很明显 F 是 $\mathcal{V}$ 的一组基 (正如对 C_n 的证明). 证明 Φ_Δ 关于基 F 的矩阵 $[\Phi_\Delta]$ 正好是 Z_n 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(Z_n)$.

(f) 证明 $\boldsymbol{A}(Z_n)$ 的特征值是 $2\cos(\frac{2\pi j}{n})$, 其中 $0 \leqslant j \leqslant n-1$. 求与之对应的特征向量?

(g) Z_n 中长为 ℓ 起始于 0 的闭游动有多少条? 给出 $n=4$ 和 $n=6$ 时的答案但不要使用三角函数, 复指数等.

(h) 设 $Z_n^{(2)}$ 为一个图, 其顶点集为 $\mathbb{Z}_n$, 边 $\{i, j\}$ 满足 $j-i=1$ 或 $j-i=2$. 在 $Z_n^{(2)}$ 中有多少条长为 ℓ 起始于 0 的闭游动? 试着用三角函数来表示答案, 但不要涉及复数.

6. 令 $\widetilde{C}_n$ 为对 n 维立方体图 C_n 的每个顶点 v 与它的对径点 (所有 n 个坐标都和 v 不同的顶点) 添加一条边所得的图. 求 $\widetilde{C}_n$ 中长为 ℓ 起点 (也是终点) 为原点 $0=(0,0,\ldots,0)$ 的闭游动个数.

第 3 章　随机游动

设 G 是一个有限图. 考虑在 G 的顶点上做如下类型的游动. 从顶点 u (顶点 u 可以是根据某一概率分布随机选取或预先指定) 出发, 在与 u 相关联的所有的边中, 均匀地随机选取一条 (即如果有 k 条边与 u 相连, 则每条边被选取的概率都是 $1/k$). 移动到被选边的另一顶点 v 上, 然后从 v 继续之前的操作. 熟悉概率论的读者会发现这种随机游动是有限状态 Markov 链的一个特例. 关于这种游动有很多有趣的问题可以问; 最基本的一个问题就是计算在给定的 ℓ 步后到达一个给定顶点的概率.

假设顶点 u 的度 (degree) 为 d_u, 即有 d_u 条边与 u 关联 (u 的每个自环仅计算一次). 记 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(G)$ 为行与列都按 G 的顶点集 $\{v_1, \ldots, v_p\}$ 依次标记的矩阵, 其 (u, v)-元为

$$\boldsymbol{M}_{uv} = \frac{\mu_{uv}}{d_u}, \tag{3.1}$$

其中 μ_{uv} 为 u 与 v 之间边的数目 (对简单图这个数为 0 或 1). 因而 $\boldsymbol{M}_{uv}$ 正好是从 u 出发, 下一步到达 v 的概率. 称 $\boldsymbol{M}$ 为与 G 相关联的*概率矩阵* (probability matrix). 经过简单的概率论证 (等价于定理 1.1) 可以证明, 如果 ℓ 是一个正整数, 则 $(\boldsymbol{M}^\ell)_{uv}$ 等于从 u 出发经过 ℓ 步到达 v 的概率. 现在假设起点不是指定的, 而是给定和为 1 的概率值 ρ_u, 并以概率 ρ_u 从顶点 u 出发. 令 P 为行向量 $P = [\rho_{v_1}, \ldots, \rho_{v_p}]$. 同样, 通过初等的论证可以证明, 如果 $P\boldsymbol{M}^\ell = [\sigma_{v_1}, \ldots, \sigma_{v_p}]$, 那么 σ_v 是 ℓ 步后到达 v 的概率 (有给定的起始分布). 如第 1 章中的推导, 若得到了 $\boldsymbol{M}$ 的特征值和特征向量, 那么我们就可以计算至关重要的概率 $(\boldsymbol{M}^\ell)_{uv}$ 和 σ_u.

既然矩阵 $\boldsymbol{M}$ 和邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 不一样, 那么以上这些和邻接矩阵又有什么关系呢? 答案是在一个重要的情况下, $\boldsymbol{M}$ 正好是 $\boldsymbol{A}$ 的数量积. 如果每一个 $d_u = d$, 则称图 G 是度为 d 的*正则图* (regular graph), 即每个顶点都与 d 条边关联. 在这种情形下很容易看到 $\boldsymbol{M}(G) = \frac{1}{d}\boldsymbol{A}(G)$. 因此 $\boldsymbol{M}(G)$ 和 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征向量 E_u 相同, 特征值为 $\lambda_u(\boldsymbol{M}) = \frac{1}{d}\lambda_u(\boldsymbol{A})$. 这样在正则图上的随机游动就与图的邻接矩阵紧密相关.

3.1 例　*考虑在 n 维立方体 C_n 上的一个随机游动, 起点在 "原点"(向量 $(0, \ldots, 0)$). 问经过 ℓ 步后再次回到原点的概率 p_ℓ 是多少? 在用任何公式之前, 注意到在偶数 (奇数) 步之后, 游动肯定到达了有偶数 (奇数) 个 1 的顶点上. 因此当 ℓ 是奇数时 $p_\ell = 0$. 现在注意到*

C_n 是度为 n 的正则图. 因此由 (2.6) 有

$$\lambda_u\big(\boldsymbol{M}(C_n)\big) = \frac{1}{n}\big(n - 2\omega(u)\big).$$

再根据 (2.10) 我们就能得到

$$p_\ell = \frac{1}{2^n n^\ell}\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}(n-2i)^\ell.$$

注意到在上式中, 当 ℓ 是奇数时 p_ℓ 确实化简为 0.

值得注意的是尽管概率矩阵 $\boldsymbol{M}$ 不一定是对称矩阵, 但它仅有实特征值.

3.2 定理 设 G 是一个有限图. 那么概率矩阵 $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}(G)$ 可对角化且仅有实特征值.

证明 可以假设 G 是连通的且至少有两个顶点, 这样对 G 中的每一个顶点 v 都有 $d_v > 0$. 令 $\boldsymbol{D}$ 为行与列都按 G 的顶点标记的对角矩阵, 且 $\boldsymbol{D}_{vv} = \sqrt{d_v}$. 那么

$$\begin{aligned}(\boldsymbol{DMD}^{-1})_{uv} &= \sqrt{d_u}\cdot\frac{\mu_{uv}}{d_u}\cdot\frac{1}{\sqrt{d_v}}\\ &= \frac{\mu_{uv}}{\sqrt{d_u d_v}}.\end{aligned}$$

因此 $\boldsymbol{DMD}^{-1}$ 是对称矩阵, 故仅有实特征值. 而如果 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 都是任意的 $p\times p$ 矩阵且 $\boldsymbol{C}$ 是可逆的, 则 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{CBC}^{-1}$ 有相同的特征多项式, 因此有相同的特征值. 这样 $\boldsymbol{M}$ 的特征值都是实数. 此外, $\boldsymbol{B}$ 可对角化当且仅当 $\boldsymbol{CBC}^{-1}$ 可对角化. (事实上, $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{CBC}^{-1}$ 有相同的 Jordan 标准型.) 因为对称矩阵可对角化, 所以 $\boldsymbol{M}$ 可对角化. □

我们给出一个更进一步的例子说明线性代数和图上的随机游动之间的联系. 设 u 和 v 是连通图 G 的顶点. 定义访问时间 (access time) 或者到达时间 (hitting time) $H(u,v)$ 为在如上定义的随机游动中, 自 u 出发首次到达 v 所走步数的期望值. 因此如果走 n 步后首次到达 v 的概率为 p_n, 则由期望的定义可得

$$H(u,v) = \sum_{n\geqslant 1} np_n. \tag{3.2}$$

可以想象这个和式可能趋于无穷, 然而下文中我们将会看到这种情形不会出现. 注意到 $H(v,v) = 0$.

举个例子, 假设 G 有三个顶点 u, v, w, 在 u 和 w 之间有一条边, 在 w 与 v 之间有另一条边. 我们可以如下这样计算 $H(u,v)$. 第一步将到达 w. 然后以 $\frac{1}{2}$ 的概率到达 v 和以 $\frac{1}{2}$ 的概率回到 u. 因此 [为什么]

$$H(u,v) = \frac{1}{2}\cdot 2 + \frac{1}{2}(2 + H(u,v)). \tag{3.3}$$

解这个线性方程可得 $H(u,v)=4$.

我们希望给出一个用线性代数计算到达时间 $H(u,v)$ 的公式. 证明中需要非负矩阵特征值和特征向量的一些基本结果, 我们将陈述和解释这些结果, 但不提供证明. 一个 $r\times r$ 实矩阵 $\boldsymbol{B}$, 当其所有元都非负时, 则称它为*非负的* (nonnegative). 当 $\boldsymbol{B}$ 不是 1×1 矩阵 $[0]$ 且不存在一个置换矩阵 $\boldsymbol{P}$ (每行每列都恰有一个 1, 且其他元都为 0 的矩阵) 使得

$$\boldsymbol{P}\boldsymbol{B}\boldsymbol{P}^{-1}=\begin{bmatrix}\boldsymbol{C} & \boldsymbol{D}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{E}\end{bmatrix},$$

其中 $\boldsymbol{C}$ 和 $\boldsymbol{E}$ 是阶数大于 0 的方阵, 则称 $\boldsymbol{B}$ 为*不可约的* (irreducible). 例如, 图 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 和概率矩阵 $\boldsymbol{M}$ 是不可约的当且仅当 G 是连通的且不是一个*孤立顶点* (isolated vertex) (也就是说, 顶点 v 没有关联任何边, 甚至没有 v 到它本身的自环). 我们现在给出未加证明的某一版本的 Perron–Frobenius *定理*. Perron-Frobenius 定理中还有些其他部分但这里不需要就省略了.

3.3 定理　*设* $\boldsymbol{B}$ *是非负不可约的方阵. 若* ρ *是* $\boldsymbol{B}$ *所有特征值的绝对值的最大值, 则* $\rho>0$, *并且存在一个特征值等于* ρ. *此外, 存在对应于* ρ *的所有元均为正数的特征向量 (该特征向量在相差一个正实数倍的意义下是唯一的).*

现在令 $\boldsymbol{M}$ 为等式 (3.1) 定义的概率矩阵. 用 $\boldsymbol{M}[v]$ 表示 $\boldsymbol{M}$ 中删除以 v 标记的那一行和那一列后余下的矩阵. 因此若 G 有 p 个顶点, 则 $\boldsymbol{M}[v]$ 是一个 $(p-1)\times(p-1)$ 的矩阵. 令 $T[v]$ 是 $p-1$ 维列向量, 它的行按顶点 $w\neq v$ 标记, 且 $T[v]_w=\mu_{wv}/d_w$. 记 I_{p-1} 为 $p-1$ 阶单位矩阵.

3.4 定理　*矩阵* $I_{p-1}-\boldsymbol{M}[v]$ *是可逆的, 且*

$$H(u,v)=\left((I_{p-1}-\boldsymbol{M}[v])^{-2}T[v]\right)_u, \tag{3.4}$$

等式右端为列向量 $(I_{p-1}-\boldsymbol{M}[v])^{-2}T[v]$ *中与顶点* u *对应的元.*

证明　我们首先给出一个 “形式上” 的论证然后再验证其正确性. 从 u 出发, 从未经过 v, n 步后到达某一顶点 w 的概率为 $(\boldsymbol{M}[v]^n)_{uw}$ [为什么]. 一旦到达了 w 下一步到 v 的概率是 μ_{wv}/d_w. 因此由期望的定义可得

$$H(u,v)=\sum_{w\neq v}\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\frac{\mu_{wv}}{d_w}(\boldsymbol{M}[v]^n)_{uw}. \tag{3.5}$$

我们断言: 若 x 是满足 $|x|<1$ 的复数, 则

$$\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n=(1-x)^{-2}. \tag{3.6}$$

上式是微积分中一个简单的练习. 例如, 我们可以计算乘积 $(1-x)^2\sum_{n\geqslant 0}(n+1)x^n$ 中 x^n 的系数. 也可以对下面这个熟悉的等式进行求导

$$\sum_{n\geqslant 0}x^n=\frac{1}{1-x}. \tag{3.7}$$

另一种证明方法是应用二项式定理对指数为 -2 的情形将 $(1-x)^{-2}$ 展开. $|x|<1$ 时收敛的结论可由例如等式 (3.7) 成立的条件得到.

我们 "盲目地" 将等式 (3.6) 应用到等式 (3.5) 中, 可得

$$\begin{aligned}H(u,v)&=\sum_{w\neq v}\left((I_{p-1}-\boldsymbol{M}[v])^{-2}\right)_{uw}\frac{\mu_{wv}}{d_w}\\&=\left((I_{p-1}-\boldsymbol{M}[v])^{-2}T[v]\right)_u,\end{aligned} \tag{3.8}$$

得证.

剩下的就是验证等式 (3.8) 中的推导. 对任意的实 (或复) $r\times r$ 矩阵 $\boldsymbol{B}$, 可以逐项定义 $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\boldsymbol{B}^n$, 也就是说, 若对 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的所有行列标号 i 和 j 都有

$$\sum_{n\geqslant 0}(n+1)(\boldsymbol{B}^n)_{ij}=\boldsymbol{C}_{ij},$$

则记 $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\boldsymbol{B}^n=\boldsymbol{C}$.

通过对 m 的归纳容易证明如下等式

$$(I_r-\boldsymbol{B})^2\left(I_r+2\boldsymbol{B}+3\boldsymbol{B}^2+\cdots+m\boldsymbol{B}^{m-1}\right)=I_r-(m+1)\boldsymbol{B}^m+m\boldsymbol{B}^{m+1}. \tag{3.9}$$

假设 $\boldsymbol{B}$ 是可对角化的且 $\boldsymbol{B}$ 所有的特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_r$ 都满足 $|\lambda_j|<1$. 注意到等式 (1.1) 的证明可以扩展到任意可对角化的矩阵. (矩阵 U 没必要是正交的, 但这与当前的证明无关.) 因此

$$(\boldsymbol{B}^n)_{ij}=c_1\lambda_1^n+\cdots+c_r\lambda_r^n,$$

其中 $c_1,\ldots,c_r$ 都是 (与 n 无关的) 复数. 可以看到当 $m\to\infty$ 时等式 (3.9) 右端的极限为 I_r. 这样 [为什么] $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\boldsymbol{B}^n$ 收敛于 $(I_r-\boldsymbol{B})^{-2}$.

注　上面的讨论证明了 $I_r-\boldsymbol{B}$ 的确是可逆的. 这也可以很快地从 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值的绝对值都小于 1 的假设中得到, 因为特别地, $\lambda=1$ 不是特征值.

通过上面的讨论可知, 剩下需要证明 $\boldsymbol{M}[v]$ 是可对角化的, 且它的所有特征值的绝对值都小于 1. $\boldsymbol{M}[v]$ 的对角化与定理 3.2 中证明 $\boldsymbol{M}$ 的对角化完全一样. (因此我们同样可得 $\boldsymbol{M}[v]$ 只有实特征值, 然而这里不需要这一结论.) 剩下证明 $\boldsymbol{M}[v]$ 的特征值 $\theta_1,\ldots,\theta_{p-1}$ 满

足 $|\theta_j| < 1$. 我们想对矩阵 $\boldsymbol{M}[v]$ 应用定理 3.3, 但是这个矩阵有可能不是不可约的, 因为图 $G-v$ (定义为从 G 中删除顶点 v 及它的所有关联边) 未必连通, 也可能恰是一个孤立顶点. 若 $G-v$ 的连通分支为 $H_1,\ldots,H_m$, 则可以重排 $G-v$ 顶点的顺序使得 $\boldsymbol{M}[v]$ 有如下的块状结构

$$\boldsymbol{M}[v]=\begin{bmatrix}\boldsymbol{N_1} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{N_2} & \cdots & \boldsymbol{0}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ \boldsymbol{0} & \boldsymbol{0} & \cdots & \boldsymbol{N_m}\end{bmatrix},$$

其中每一个 $\boldsymbol{N_i}$ 都是不可约的或者是 1×1 的矩阵 $[0]$ (对应的 H_i 是一个孤立顶点). $\boldsymbol{M}[v]$ 的特征值就是 $\boldsymbol{N_i}$ 的特征值.

我们需要证明 $\boldsymbol{N_i}$ 的每个特征值的绝对值都小于 1. 若 $N_i=[0]$ 则它的特征值只有 0, 因此我们可以假设 H_i 不是一个孤立顶点. 假设 H_i 有 k 个顶点, 则 $\boldsymbol{N_i}$ 是 $k\times k$ 矩阵. 令 ρ_i 为 $\boldsymbol{N_i}$ 的最大实特征值, 那么由定理 3.3 可知 $\boldsymbol{N_i}$ 的所有特征值 λ 都满足 $|\lambda|\leqslant\rho_i$. 注意 $\boldsymbol{N_i}$ 与 $\boldsymbol{N_i}^t$ 有相同的特征值. 设列向量 $U=[u_1,\ldots,u_k]^t$ 为 $\boldsymbol{N_i}^t$ 关于 ρ_i 的特征向量, 且它的所有元都为正数 (由定理 3.3 可知它的存在性). 用 V 表示长为 k 的全 1 行向量. 考虑矩阵的乘积 $V\boldsymbol{N_i}^tU$. 一方面我们有

$$V\boldsymbol{N_i}^tU=V(\rho_iU)=\rho_i(u_1+\cdots+u_k). \tag{3.10}$$

另一方面, 若 σ_j 表示 $\boldsymbol{N_i}^t$ 的第 j 列各元的和, 则

$$V\boldsymbol{N_i}^tU=[\sigma_1,\ldots,\sigma_k]U=\sigma_1u_1+\cdots+\sigma_ku_k. \tag{3.11}$$

现在每一个 σ_j 都满足 $0\leqslant\sigma_j\leqslant 1$, 且至少有一个 σ_h 满足 $\sigma_h<1$ [为什么]. 因为每一个 $u_j>0$, 从等式 (3.11) 可得 $V\boldsymbol{N_i}^tU<u_1+\cdots+u_k$. 再与等式 (3.10) 比较可得 $\rho_i<1$.

因为 $\boldsymbol{M}[v]$ 的特征值就是 $\boldsymbol{N_i}$ 的特征值, 这样 $\boldsymbol{M}[v]$ 的所有特征值 θ 都满足 $|\theta|<1$. 定理 3.4 证毕. □

3.5 例 设 G 为图 3.1 所示的图并令 $v=v_4$. 那么

$$\boldsymbol{M}=\begin{bmatrix}\frac13 & \frac13 & 0 & \frac13\\ \frac14 & 0 & \frac14 & \frac12\\ 0 & \frac12 & 0 & \frac12\\ \frac14 & \frac12 & \frac14 & 0\end{bmatrix},$$

$$I_3-\boldsymbol{M}[v]=\begin{bmatrix}\frac23 & -\frac13 & 0\\ -\frac14 & 1 & -\frac14\\ 0 & -\frac12 & 1\end{bmatrix},$$

$$(I_3 - \boldsymbol{M}[v])^{-2} = \begin{bmatrix} \frac{55}{16} & \frac{13}{6} & \frac{17}{24} \\ \frac{13}{8} & \frac{7}{3} & \frac{11}{12} \\ \frac{17}{16} & \frac{11}{6} & \frac{13}{8} \end{bmatrix},$$

$$(I_3 - \boldsymbol{M}[v])^{-2} \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{31}{12} \\ \frac{13}{6} \\ \frac{25}{12} \end{bmatrix}.$$

因此 $H(v_1, v) = 31/12$, $H(v_2, v) = 13/6$, 和 $H(v_3, v) = 25/12$.

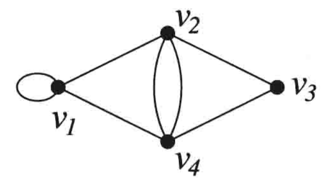


图 3.1　例 3.5 的图 G

注　用于证明当 $\boldsymbol{B}$ 的所有特征值的绝对值小于 1 时, $\sum_{n\geqslant 0}(n+1)\boldsymbol{B}^n$ 收敛的方法可以推广, 通过进一步努力 (主要关于非对角化的情形) 可以证明如下结论. 令 $F(x) = \sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ 为一个幂级数, 其系数 a_n 为复数. 设 $\alpha > 0$ 为使得 $|x| < \alpha$ 时 $F(x)$ 收敛的数. 用 $\boldsymbol{B}$ 表示所有特征值 λ 都满足 $|\lambda| < \alpha$ 的复方阵. 那么矩阵幂级数 $\sum_{n\geqslant 0} a_n \boldsymbol{B}^n$ 具有如前文描述的逐项收敛的性质.

第 3 章注记

图上的随机游动是一个广泛的课题, 这里我们仅仅只接触到了一点皮毛. 有两个比我们当前考虑的问题深刻得多的典型问题: 一个随机游动以多快的速度趋于练习 3.1 中所定义的平稳分布? 假设 G 是连通的, 问经过所有顶点所需步数的期望值? 关于图上随机游动一个很好的综述见 Lovász [71]. 矩阵幂级数是矩阵分析 (matrix analysis) 这一课题的一部分. 有关矩阵幂级数更多的内容, 请见如 Horn and Johnson [58] 书中的第 5 章. 为避免用到矩阵范数理论, 书中定理 3.4 的证明看起来有一点 "幼稚".

第 3 章练习

1. 设 G 是一个 (有限) 图, 其顶点为 $v_1, \ldots, v_p$. 假设由 (3.1) 定义的概率矩阵 $\boldsymbol{M}(G)$ 的某一次幂的所有元都为正数. (不难发现这等价于 G 是连通的且包含至少一个奇数长度的圈, 但读者不需要证明这一结论.) 用 d_k 表示顶点 v_k 的度 (关联的边数). 令 $D = d_1 + d_2 + \cdots + d_p = 2q - r$, 其中 G 有 q 条边且有 r 个自环. 从 G 的任一顶点出发, 在 G 的顶点上进行如本章定义的随机游动. 用 $p_k(\ell)$ 表示 ℓ 步后到达顶点 v_k 的概率. 假定 Perron-Frobenius 定理 (定理 3.3) 成立, 证明

$$\lim_{\ell \to \infty} p_k(\ell) = d_k/D.$$

称上面这一在 G 的顶点集上的极限概率分布为随机游动的平稳分布 (stationary distribution).

2. (a) 设 G 为有限图 (允许自环和重边). 假设存在某一整数 $\ell > 0$, 使得从任一给定顶点 u 到任一给定顶点 v 长为 ℓ 的游动数与 u 和 v 无关. 证明 G 中任意两顶点间都有 k 条边 (包括每个顶点都有 k 个自环).

   (b) 设 G 为具有如下性质的有限图 (允许自环和重边). 存在某一整数 $\ell > 0$ 使得如果从 G 的任一顶点出发做 ℓ 步的随机游动 (如前文所指), 那么到达任一顶点的概率相等. 换句话说, 若 G 有 p 个顶点, 则游动到达任一顶点 v 的概率都是 $1/p$. 证明有如 (a) 一样的结论, 即 G 中任意两顶点间都有 k 条边.

3. (a) 设 $P(x)$ 为一个实系数的非零多项式. 证明下面两条件等价.
   - 存在一个实系数的非零多项式 $Q(x)$ 使得 $P(x)Q(x)$ 的所有系数都非负.
   - 不存在实数 $a > 0$ 使得 $P(a) = 0$.

   (b) (困难) 设 G 为连通的 (connected) 有限图, $\boldsymbol{M}$ 为 (3.1) 定义的概率矩阵. 证明下面两条件等价.
   - 存在 $\mathbb{P}$ 上的一个概率分布 P (那么选取 $k \in \mathbb{P}$ 的概率为 $P(k)$), 使得若我们首先从分布 P 中选取 k, 然后从 G 中的任一顶点出发随机游动 k 步, 则到达 G 中任一顶点的概率相等.
   - 图 G 是正则的, 且 $\boldsymbol{M}$ 不存在除 1 之外的正实数特征值.

4. (*) 固定 $0 \leqslant p \leqslant 1$. 从 n 维立方体 C_n 的顶点 $(0, 0, \ldots, 0)$ 出发, 根据下面的规则沿着立方体的边游动: 每一个单位时间后, 要么以概率 p 停在原地, 要么随机 (均匀地) 跳到一个相邻的顶点. 因此跳到一个特定相邻顶点的概率为 $(1-p)/n$. 问 ℓ 个单位时间后重新回到 $(0, 0, \ldots, 0)$ 的概率 $P(\ell)$ 是多少? 例如, $P(0) = 1$ 和 $P(1) = p$. 用一个有限和式表示所求概率.

5. 这一问题与本书没有直接的关系, 但它是一个经典的问题, 并有着非常智慧和漂亮的

结论. 设 G 是顶点集为 $\mathbb{Z}_n$ (模 n 的整数) 的图, 对所有的 $i \in \mathbb{Z}_n$ 在 i 和 $i+1$ 之间有一条边. 因此 G 正好是一个 n-圈. 从顶点 0 出发, 并进行本书所述的随机游动, 这样从顶点 i 游动到 $i-1$ 或 $i+1$ 的概率都为 1/2. 对每一个 $i \in \mathbb{Z}_n$, 问顶点 i 是最后一个首次经过的顶点的概率是多少? 即当首次到达顶点 i 时, 已经经过了所有其他的顶点至少一次. 例如, $p_0 = 0$ (若 $n > 1$), 因为顶点 0 是第一个 (first) 经过的顶点.

6. (a) 证明: 若 u 和 v 是连通图 G 的两个顶点, 则不一定有 $H(u,v) = H(v,u)$, 其中 H 表示到达时间. 如果 G 是正则的情况又会怎样?
   (b) (困难) 对每一个 $n \geqslant 1$ 和有 n 个顶点的连通简单图的两顶点 u 及 v, 问 $H(u,v) - H(v,u)$ 可取到的最大值是多少?
7. (*) 设 u 和 v 为完全图 K_n 中不同的顶点. 证明 $H(u,v) = n-1$.
8. (*) 设 P_n 是顶点为 $v_1, \ldots, v_n$ 的图, 对所有的 $1 \leqslant i \leqslant n-1$, 在 v_i 和 v_{i+1} 之间有一条边. 证明 $H(v_1, v_n) = (n-1)^2$. 对任意的 $i \neq j$, 问 $H(v_i, v_j)$ 等于多少? 若在 v_1 和 v_n 之间也有一条边情形又会怎样?
9. 设 K_{mn} 为一个完全二部图, 其顶点分为了两个部分 (A_1, A_2), 其中 $\#A_1 = m$ 和 $\#A_2 = n$. 计算每一对相异顶点间的到达时间 $H(u,v)$. 存在两种不等价的情形: u 和 v 都在同一个 A_i 中, 或它们在不同的 A_i 中.
10. (*) 对图 G 的任意三个顶点 u, v, w, 证明

$$H(u,v) + H(v,w) + H(w,u) = H(u,w) + H(w,v) + H(v,u).$$

11. 设 $k \geqslant 0$, 且 u 和 v 为图 G 的顶点. 定义到达时间的 k 次二项矩 (binomial moment) $H_k(u,v)$ 为 $\binom{n}{k}$ 的平均值 (期望), 其中 n 是从 u 出发的随机游动首次到达 v 时所走的步数. 因此, 在 (3.2)的记号下, 我们有

$$H_k(u,v) = \sum_{n \geqslant 1} \binom{n}{k} p_n.$$

设 x 为一个不定元. 沿用 (3.4) 中的记号, 证明

$$\sum_{k \geqslant 0} H_k(u,v) x^k = \left((I_{p-1} - (x+1)\boldsymbol{M}[v])^{-1} T[v] \right)_u.$$

12. (*) 本题是练习 3.7 的推广, 证明对完全图 K_n 的任意两个不同的顶点 u 和 v, 到达时间的 k 次二项矩为 $H_k(u,v) = (n-1)(n-2)^{k-1}$, $k \geqslant 1$. (当 $n=2$ 且 $k=1$ 时, 应取 $0^0 = 1$.)

第 4 章　Sperner 性质

本章我们考虑特定邻接矩阵在极值集合论中某些问题上出人意料的应用. 第5章是本章内容的延伸, 其中有限群也将发挥重要的作用. 总而言之, 极值集合论是寻找 (或估算) 满足给定条件的集合的最大或最小数目, 而这些条件一般是集合理论性的或组合的条件. 例如, 极值集合论中一个典型且简单的问题是: 对于给定的 n 元集合, 最多可以取多少个子集, 使得这些子集两两相交?(读者能否解答这个问题?) 这里考虑的问题用偏序集 (partially ordered set) 表示最为方便. 因此我们先讨论偏序集的一些基本概念.

4.1 定义　偏序集 P 是一个有限集合, 仍记为 P, 配备一个满足下面原理的二元关系 $\leqslant$:

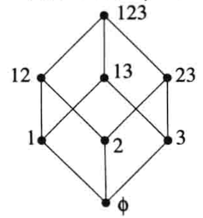
(P1) (自反性) 对所有的 $x \in P$ 有 $x \leqslant x$.

(P2) (反对称) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant x$, 则 $x = y$.

(P3) (传递性) 若 $x \leqslant y$ 且 $y \leqslant z$, 则 $x \leqslant z$.

得到一个偏序集的简单方法如下. 设 P 为任意一个集族. 对 $x, y \in P$, 如果 (作为集合) $x \subseteq y$, 那么在 P 中定义 $x \leqslant y$. 容易看到这样定义的 $\leqslant$ 使得 P 构成了一个偏序集. 如果 P 是由 n 元集合 S 的全部 (all) 子集构成, 则称 P 是一个秩 (rank) 为 n 的 (有限) 布尔代数 (Boolean algebra), 记为 B_S. 若 $S = \{1, 2, \ldots, n\}$, 则将 B_S 简记为 B_n. 布尔代数在本章和下一章中将占据重要的地位.

有一种简单的方法来图形化地表示小偏序集. 偏序集 P 的 Hasse 图 是一个将 P 的元素画做点的平面图形. 若 P 中的元素 $x < y$ (即 $x \leqslant y$ 且 $x \neq y$), 则将 y 画在 x 的 "上方"(即有更大的垂直坐标). 若 y *覆盖* (covers) x, 即 $x < y$ 且没有元素 z 满足 $x < z < y$, 则在 x 与 y 之间画一条边. 记为 $x \lessdot y$ 或 $y \gtrdot x$. 由传递性质 (P3), 有限偏序集的所有关系都由覆盖关系确定, 因此 Hasse 图唯一确定了 P. (但对无限偏序集这不正确; 例如, 在常用序下的实数集 $\mathbb{R}$ 是一个没有覆盖关系的偏序集.) 布尔代数 B_3 的 Hasse 图为



如果存在偏序集 P 和 Q 之间的一个双射 (单射且满射的函数) φ: $P \to Q$ 使得在 P

中 $x \leqslant y$ 当且仅当在 Q 中 $\varphi(x) \leqslant \varphi(y)$, 那么称 P 与 Q 是同构的 (isomorphic). 因此若两个偏序集仅有元素名称的不同, 则可以认为它们是同构的. 这与群和环等的同构概念类似. 一个有益的练习 (见练习 4.1) 是画出阶 (order) (元素个数) 为 1 的 1 个 (同构意义下的) 偏序集的 Hasse 图, 以及阶为 2 的 2 个偏序集, 阶为 3 的 5 个偏序集, 阶为 4 的 16 个偏序集的 Hasse 图. 对更有抱负的读者可以试试阶为 5 的 63 个偏序集, 阶为 6 的 318 个偏序集, 阶为 7 的 2 045 个偏序集, 阶为 8 的 16 999 个偏序集, 阶为 9 的 183 231 个偏序集, 阶为 10 的 2 567 284 个偏序集, 阶为 11 的 46 749 427 个偏序集, 阶为 12 的 1 104 891 746 个偏序集, 阶为 13 的 33 823 827 452 个偏序集, 阶为 14 的 1 338 193 159 771 个偏序集, 阶为 15 的 68 275 077 901 156 个偏序集, 阶为 16 的 4 483 130 665 195 087 个偏序集. 除了这些其他的数目前都未知.

偏序集中的链 (chain) C 是 P 中一个完全排序的子集, 即如果 $x, y \in C$, 那么在 P 中要么 $x \leqslant y$, 要么 $y \leqslant x$. 若一个有限链有 $n+1$ 个元素, 则称它的长度 (length) 为 n. 这样的链因此有如下的形式: $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$. 若有限偏序集中每一个极大链的长度都为 n, 则称它是秩 (rank) 为 n 的分次 (graded) 偏序集. (若一个链没有包含在任何更大的链中, 则称它是极大的 (maximal).) 例如, 布尔代数 B_n 就是秩为 n 的分次偏序集 [为什么]. 对链 $y_0 < y_1 < \cdots < y_j$, 若每一个 y_{i+1} 都覆盖 y_i, 则称这条链为 饱和的 (saturated). 这样的链不一定是极大的, 因为在 P 中可以存在比 y_0 小或是比 y_j 大的元素. 对秩为 n 的分次偏序集 P 以及 $x \in P$, 若在 P 中以元素 x 为顶点的最大饱和链的长度为 j, 则称 x 的秩 (rank) 为 j, 用 $\rho(x) = j$ 来表示. 因此 [为什么] 若记 $P_j = \{x \in P \colon \rho(x) = j\}$, 则 P 是一个无交 (disjoint) 的并集 $P = P_0 \cup P_1 \cup \cdots \cup P_n$, 且 P 中每一个极大链都形如 $x_0 < x_1 < \cdots < x_n$, 其中 $\rho(x_j) = j$. 称 P_j 为 P 的第 j 层水平. 记 P 中秩为 j 的元素个数为 $p_j = \#P_j$. 例如, 若 $P = B_n$ 则 $\rho(x) = |x|$ (x (作为集合) 的基数) 且

$$p_j = \#\{x \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} \colon |x| = j\} = \binom{n}{j}.$$

(注意到我们同时用了 $|S|$ 和 $\#S$ 来表示一个有限集合 S 的基数.) 若一个秩为 n 的分次偏序集 P 有 p_i 个秩为 i 的元素, 则定义秩生成函数 (rank-generating function) 为

$$F(P, q) = \sum_{i=0}^{n} p_i q^i = \sum_{x \in P} q^{\rho(x)}.$$

例如, $F(B_n, q) = (1+q)^n$ [为什么].

一个秩为 n 的分次偏序集 P (假设它总是有限的), 若对 $0 \leqslant i \leqslant n$ 都有 $p_i = p_{n-i}$, 则称它为秩对称的 (rank-symmetric), 若对某一 $0 \leqslant j \leqslant n$ 有 $p_0 \leqslant p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_j \geqslant p_{j+1} \geqslant p_{j+2} \geqslant \cdots \geqslant p_n$, 则称它为秩单峰的 (rank-unimodal). 如果 P 既是秩对称又是秩单峰的,

那么显然有

$$p_0 \leqslant p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_m \geqslant p_{m+1} \geqslant \cdots \geqslant p_n, \text{ 若 } n = 2m$$

$$p_0 \leqslant p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_m = p_{m+1} \geqslant p_{m+2} \geqslant \cdots \geqslant p_n, \text{ 若 } n = 2m+1.$$

我们也称序列 $p_0, p_1, \ldots, p_n$ 本身或多项式 $F(q) = p_0 + p_1 q + \cdots + p_n q^n$ 在相应的情况下为**对称的** (symmetric) 或**单峰的** (unimodal). 例如, B_n 就是秩对称的和秩单峰的, 因为众所周知 (也很容易证明) 序列 $\binom{n}{0}, \binom{n}{1}, \ldots, \binom{n}{n}$ (Pascal 三角形的第 n 行) 是对称和单峰的. 因此多项式 $(1+q)^n$ 是对称和单峰的.

再有几个定义, 就能有一些结论了! 偏序集 P 的**反链** (antichain) 是 P 的子集 A, 要求其中任何两个元素都是不可比较的, 即不能有 $x, y \in A$ 且 $x < y$. 例如, 分次偏序集 P 的 "水平" P_j 都是反链 [为什么]. 我们关心的就是寻找偏序集中最大反链的问题. 例如对布尔代数 B_n. 在 B_n 中寻找最大反链的问题很明显等价于极值集合论中如下的问题: 寻找 n 元集合的最大子集族, 使得子集族中没有元素包含别的元素. 有一个好的猜测, 即取基数为 $\lfloor n/2 \rfloor$ 的全部子集 (其中 $\lfloor x \rfloor$ 表示 $\leqslant x$ 的最大整数), 一共有 $\binom{n}{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个集合. 但是怎样才能证明确实没有更大的子集族了? 最早的证明由 Emanuel Sperner 在 1927 年给出, 其结论现在被称为 **Sperner 定理**. 本章中我们将给出 Sperner 定理的三种证明: 第一种证明利用了线性代数并将被应用于其他特定情形; 第二种证明是由 David Lubell 于 1966 年给出的一个漂亮的组合论证; 第三种证明是与线性代数证明密切相关的另一个组合论证. 我们展示后两种证明是因为其 "文化价值". 对 Sperner 定理在其他特定情形下的推广涉及如下这个重要的定义.

4.2 定义 设 P 是秩为 n 的分次偏序集. 若

$$\max\{\#A\colon A \text{ 是 } P \text{ 的反链}\} = \max\{\#P_i\colon 0 \leqslant i \leqslant n\},$$

则称 P 具有 **Sperner 性质**或者是 **Sperner 偏序集**. 换句话说, 不存在比最大水平 P_i 更大的反链.

因此 Sperner 定理等价于是说 B_n 具有 Sperner 性质. 注意到若 P 具有 Sperner 性质, 则可能仍然存在不同于最大 P_i 但具有最大基数的反链; 只是不能有更大的反链.

4.3 例 下面是一个不满足 Sperner 性质的分次偏序集的简单例子:



我们现在讨论一个简单的组合条件, 该条件确保一类特定分次偏序集 P 是 Sperner 偏序集. 定义 P_i 到 P_{i+1} 的**序匹配** (order-matching) 为一个单射 (one-to-one) 函数 $\mu\colon P_i \to P_{i+1}$ 满足对所有的 $x \in P_i$ 有 $x < \mu(x)$. 显然如果存在这种序匹配, 则 $p_i \leqslant p_{i+1}$ (因为 μ

是单射). (如上图的) 简单例子可说明逆命题是错误的, 即若 $p_i \leqslant p_{i+1}$ 则不一定存在 P_i 到 P_{i+1} 的序匹配. 可以类似地定义 P_i 到 P_{i-1} 的序匹配为一个单射函数 $\mu\colon P_i \to P_{i-1}$ 满足对所有的 $x \in P_i$ 有 $\mu(x) < x$.

4.4 命题 设 P 是秩为 n 的分次偏序集. 若存在一个整数 $0 \leqslant j \leqslant n$ 和序匹配

$$P_0 \to P_1 \to P_2 \to \cdots \to P_j \leftarrow P_{j+1} \leftarrow P_{j+2} \leftarrow \cdots \leftarrow P_n. \tag{4.1}$$

则 P 是秩单峰的, 且是一个 Sperner 偏序集.

证明 因为序匹配是单射, 所以显然有

$$p_0 \leqslant p_1 \leqslant \cdots \leqslant p_j \geqslant p_{j+1} \geqslant p_{j+2} \geqslant \cdots \geqslant p_n.$$

因此 P 是秩单峰的.

如下定义一个图 G. 图 G 的顶点就是 P 的元素. 若命题中的某一序匹配 μ 满足 $\mu(x) = y$, 则在顶点 x, y 间连一条边. (因此 G 是 P 的 Hasse 图的子图.) 读者自己画一个图就会确信 G 由一些路的非交并构成, 其中包括没有包含在任何序匹配中的单点路. 每条路的顶点就形成了 P 的一条链. 因此我们将 P 的元素分解成了一些非交的链. 因为 P 是单峰的且最大水平为 P_j, 所以每条链都必须穿过 P_j [为什么]. 因此共有 p_j 条链. 而任意的反链与每条链至多相交一次, 这样 A 的基数 $|A|$ 不能多于链的数目, 即 $|A| \leqslant p_j$. 因此由定义知 P 是 Sperner 偏序集. □

现在终于有些线性代数的东西可以映入眼帘了. 对任意的 (有限) 集合 S, 用 $\mathbb{R}S$ 表示 S 中元素的所有 (实系数) 形式线性组合所构成的实向量空间. 因此 S 是 $\mathbb{R}S$ 的一组基, 实际上我们可以将 $\mathbb{R}S$ 简单地定义成基为 S 的实向量空间. 下面这个引理将我们刚刚讨论过的组合性质与线性代数联系了起来, 并且使得我们可以利用线性代数 (结合一点有限群论) 来证明特定的偏序集是 Sperner 偏序集.

4.5 引理 假设存在一个线性变换 $U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ (U 表示“向上”) 满足:

- U 是单射.
- 对所有的 $x \in P_i$, $U(x)$ 是满足 $x < y$ 的元素 $y \in P_{i+1}$ 的线性组合. (称 U 为序提升算子 (order-raising operator).)

则存在一个序匹配 $\mu\colon P_i \to P_{i+1}$.

类似地, 假设存在一个线性变换 $U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ 满足:

- U 是满射.
- U 是序提升算子.

则存在一个序匹配 $\mu\colon P_{i+1} \to P_i$.

证明 假设 $U\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ 是一个单射序提升算子. 用 $[U]$ 表示 U 关于 $\mathbb{R}P_i$ 的基 P_i 与 $\mathbb{R}P_{i+1}$ 的基 P_{i+1} 的矩阵. 因此 $[U]$ 的行是按照 P_{i+1} 的元素 $y_1, \ldots, y_{p_{i+1}}$ (以某种顺序) 依次标记, 列按照 P_i 的元素 $x_1, \ldots, x_{p_i}$ 依次标记. 因为 U 是单射, 所以 $[U]$ 的秩等于 p_i (列的数目). 因为一个矩阵的行向量的秩等于列向量的秩, 所以 $[U]$ 有 p_i 个线性无关的行. 假定我们适当地排列 P_{i+1} 的元素使得 $[U]$ 的前 p_i 行是线性无关的.

设 $A = (a_{ij})$ 为 $[U]$ 的前 p_i 行所构成的 $p_i \times p_i$ 矩阵. (因此 A 是 $[U]$ 的方块子矩阵.) 因为 A 的行是线性无关的, 所以

$$\det(A) = \sum \pm a_{1\pi(1)} \cdots a_{p_i\pi(p_i)} \neq 0,$$

其中和式遍历 $1, \ldots, p_i$ 的全排列 π. 因此以上和式中的某一项 $\pm a_{1\pi(1)} \cdots a_{p_i\pi(p_i)}$ 非零. 因为 U 是序提升的, 这就意味着 [为什么] 对 $1 \leqslant k \leqslant p_i$ 有 $y_k > x_{\pi(k)}$. 因此由 $\mu(x_k) = y_{\pi^{-1}(k)}$ 定义的映射 $\mu\colon P_i \to P_{i+1}$ 是一个序匹配, 得证.

当 U 是满射而非单射时, 可由完全相似的讨论得证. 也可以通过考虑矩阵 $[U]$ 的转置, 从单射的情形推导出来. □

注 将单射序提升算子看做“量子序匹配”是很有意义的, 虽然这对理解我们的理论并没有实际的帮助. 我们同时取所有可能的满足 $y > x$ 的元素 $y \in P_{i+1}$, 而不仅是单单取一个与 $x \in P_i$ 匹配的元素 $y = \mu(x)$. 若 $U(x) = \sum_{y>x} c_y y$ (其中 $c_y \in \mathbb{R}$), 则选取带有“权” c_y 的 y. 如同以上引理 4.5 的证明中所阐述的, 我们“打破了对称性”并通过选取行列式的展开式中某一非零项来得到一个单一匹配的元素 $\mu(x)$.

我们现在希望将命题 4.4 和引理 4.5 应用到布尔代数 B_n 上. 对每一个 $0 \leqslant i < n$, 我们需要定义一个线性变换 $U_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$, 然后证明它有我们所期待的性质. 定义 U_i 为可能的最简单的序提升算子, 即对 $x \in (B_n)_i$, 令

$$U_i(x) = \sum_{\substack{y \in (B_n)_{i+1} \\ y > x}} y. \tag{4.2}$$

注意, 因为 $(B_n)_i$ 是 $\mathbb{R}(B_n)_i$ 的一组基, 所以等式 (4.2) 确实唯一定义了一个线性变换 $U_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$. 由定义可知 U_i 是序提升算子. 我们想要证明的是当 $i < n/2$ 时 U_i 是单射, 而当 $i \geqslant n/2$ 时 U_i 是满射. 有多种方法可以证明这一结论, 而仅用到初等的线性代数. 我们将给出的大概是最简单的一种证明, 虽然该证明非常具有技巧性. 证明的思想就是引入 U_i 的“对偶”或“伴随”算子 $D_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i-1}$ (D 表示“向下”), 对所

有的 $y \in (B_n)_i$ 有如下定义:

$$D_i(y) = \sum_{\substack{x \in (B_n)_{i-1} \\ x < y}} x. \tag{4.3}$$

用 $[U_i]$ 表示 U_i 关于基 $(B_n)_i$ 和 $(B_n)_{i+1}$ 的矩阵, 类似地, 用 $[D_i]$ 表示 D_i 关于基 $(B_n)_i$ 和 $(B_n)_{i-1}$ 的矩阵. 一个下文将要用到的关键性的观察结果是

$$[D_{i+1}] = [U_i]^t, \tag{4.4}$$

即矩阵 $[D_{i+1}]$ 是矩阵 $[U_i]$ 的转置 [为什么]. 设 $I_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_i$ 表示 $\mathbb{R}(B_n)_i$ 上的恒等变换, 即对所有的 $u \in \mathbb{R}(B_n)_i$ 有 $I_i(u) = u$. 下面这个引理阐述了 (在线性代数的范畴) 我们所需的 B_n 的基本组合性质. 引理中取 $U_n = 0$ 且 $D_0 = 0$ (0 表示两个适当向量空间之间的 0 线性变换).

4.6 引理　设 $0 \leqslant i \leqslant n$, 则

$$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = (n-2i)I_i. \tag{4.5}$$

(线性变换是从右至左地做乘积, 因此 $AB(u) = A(B(u))$.)

证明　设 $x \in (B_n)_i$. 我们需要证明若将等式 (4.5) 的左边作用到 x 上, 则能得到 $(n-2i)x$. 我们有

$$\begin{aligned} D_{i+1}U_i(x) &= D_{i+1}\Bigg(\sum_{\substack{|y|=i+1 \\ x \subset y}} y\Bigg) \\ &= \sum_{\substack{|y|=i+1 \\ x \subset y}} \sum_{\substack{|z|=i \\ z \subset y}} z. \end{aligned}$$

若 $x, z \in (B_n)_i$ 满足 $|x \cap z| < i-1$, 则不存在使得 $x \subset y$ 且 $z \subset y$ 的 $y \in (B_n)_{i+1}$. 因此 $D_{i+1}U_i(x)$ 按基 $(B_n)_i$ 展开时, z 前的系数为 0. 若 $|x \cap z| = i-1$, 则只存在一个这样的 y, 即 $y = x \cup z$. 最后若 $x = z$ 则 y 可以是 $(B_n)_{i+1}$ 中任意包含 x 的元素, 共有 $n-i$ 个这样的 y. 因此

$$D_{i+1}U_i(x) = (n-i)x + \sum_{\substack{|z|=i \\ |x \cap z| = i-1}} z. \tag{4.6}$$

通过完全类似的推导 (请读者自己验证), 对 $x \in (B_n)_i$ 有

$$U_{i-1}D_i(x) = ix + \sum_{\substack{|z|=i \\ |x \cap z| = i-1}} z. \tag{4.7}$$

等式 (4.6) 减去等式 (4.7) 可得 $(D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i)(x) = (n-2i)x$, 得证. □

4.7 定理 算子 U_i 如前文定义, 当 $i < n/2$ 时它是单射, 当 $i \geqslant n/2$ 时它是满射.

证明 回顾 $[D_i] = [U_{i-1}]^t$. 由线性代数的知识我们知道一个 (矩形) 矩阵与它转置的乘积是半正定的 (positive semidefinite) (或简称半定的) 且有非负 (实) 特征值. 由引理 4.6 可知

$$D_{i+1}U_i = U_{i-1}D_i + (n-2i)I_i.$$

因此 $D_{i+1}U_i$ 的特征值可由 $U_{i-1}D_i$ 的特征值加上 $n-2i$ 得到. 当 $n-2i>0$ 时 $D_{i+1}U_i$ 的特征值都是非零正数. 因此 $D_{i+1}U_i$ 可逆 (因为没有 0 特征值). 这也就意味着 U_i 是单射 [为什么].

$i \geqslant n/2$ 的情形可由 "对偶" 论证得到 (或者利用偏序集 B_n 是 "自对偶的", 由 $i < n/2$ 的情形直接推导出来, 我们这里不讨论这一方法). 即从以下等式

$$U_iD_{i+1} = D_{i+2}U_{i+1} + (2i+2-n)I_{i+1}$$

可得 U_iD_{i+1} 可逆, 因此 U_i 是满射, 证毕. □

结合命题 4.4、引理 4.5 和定理 4.7, 我们就得到了下面这个著名的 Sperner 定理.

4.8 推论 布尔代数 B_n 具有 Sperner 性质.

读者很自然地会问是否存在对推论 4.8 更直接的证明. 事实上, 我们已知有不少漂亮的证明, 首先给出由 David Lubell 得到的一种证明, 这在定义 4.2 之前提到过.

Lubell 对 Sperner 定理的证明 首先计算 B_n 的极大链 $\emptyset = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = \{1,\ldots,n\}$ 的总数. 对 x_1 有 n 种选择, 然后对 x_2 有 $n-1$ 种选择, 等等, 这样共有 $n!$ 条极大链. 下面计算包含秩为 i 的给定元素 x 的极大链 $x_0 < x_1 < \cdots < x_i = x < \cdots < x_n$ 的数目. 对 x_1 有 i 种选择, 然后对 x_2 有 $i-1$ 种选择, 直到对 x_i 的一种选择. 类似地, 对 x_{i+1} 有 $n-i$ 种选择, 然后对 x_{i+2} 有 $n-i-1$ 种选择, 等等, 直到对 x_n 的一种选择. 因此包含 x 的极大链有 $i!(n-i)!$ 条.

现在设 A 为一条反链. 如果 $x \in A$, 那么令 C_x 为 B_n 中包含 x 的极大链的集合. 因为 A 是反链, 集合 $C_x (x \in A)$ 是两两不相交的. 因此

$$\begin{aligned}\left|\bigcup_{x\in A} C_x\right| &= \sum_{x\in A} |C_x| \\ &= \sum_{x\in A} (\rho(x))!(n-\rho(x))!.\end{aligned}$$

因为 C_x 中极大链的总数不能超过 B_n 中极大链的总数 $n!$, 所以

$$\sum_{x\in A} \big(\rho(x)\big)!(n-\rho(x))! \leqslant n!.$$

等式两端同时除以 $n!$ 可得

$$\sum_{x\in A}\frac{1}{\binom{n}{\rho(x)}}\leqslant 1.$$

当 $i=\lfloor n/2\rfloor$ 时 $\binom{n}{i}$ 取到最大值, 故对所有的 $x\in A$ (或者所有的 $x\in B_n$) 有

$$\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}\leqslant\frac{1}{\binom{n}{\rho(x)}}.$$

因此

$$\sum_{x\in A}\frac{1}{\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}}\leqslant 1,$$

或等价地,

$$|A|\leqslant\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

因为 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$ 是 B_n 中最大水平的元素个数, 由此可得 B_n 是 Sperner 偏序集. □

另一种直接证明 B_n 是 Sperner 偏序集的好方法是对 $i<n/2$ 构造一个明确的序匹配 $\mu\colon (B_n)_i\to(B_n)_{i+1}$. 我们将通过一个例子来说明怎么定义 μ. 设 $n=21$, $i=9$, 且 $S=\{3,4,5,8,12,13,17,19,20\}$, 我们需要定义 $\mu(S)$. 令 $(a_1,a_2,\ldots,a_{21})$ 为 ±1 的一个序列, 其中当 $i\in S$ 时 $a_i=1$, 当 $i\notin S$ 时 $a_i=-1$. 对以上集合 S 我们得到了序列 (将 -1 记为 $-$)

$$--111--1---11---1-11-.$$

用 00 替换每个连续的两项 $1-$:

$$--1100-00--100--00100.$$

忽略 0 再用 00 替换每个连续的两项 $1-$:

$$--1000000--0000-00100.$$

继续这种操作:

$$--00000000-0000-00100.$$

到这一步无法再进行更多的替换. 非零项由一个 “$-$” 的序列跟随着一个 “1” 的序列构成. 因为 $i<n/2$, 所以存在至少一个 “$-$”. 设 k 为最后一个 “$-$” 的位置 (坐标), 这里 $k=16$. 定义 $\mu(S)=S\cup\{k\}=S\cup\{16\}$. 读者可以验证以上操作给出了一个序匹配. 特别地, 为什么 μ 是单射 (一对一的), 即为什么从 $\mu(S)$ 能返回 S?

将刚刚定义的对 $i<n/2$ 的序匹配 $(B_n)_i\to(B_n)_{i+1}$, 与 $i>n/2$ 时其显然的对偶序匹配 $(B_n)_i\to(B_n)_{i-1}$ 粘结起来, 能够验证我们得到的不仅仅是命题 4.4 中证明的那样, 将

B_n 分解成了一些穿过中间水平 (n 为偶数) 或中间两层水平 (n 为奇数) 的饱和链. 我们事实上得到了一个额外的性质, 那就是这些链都是对称的 (symmetric), 即它们开始于某一第 $i \leqslant n/2$ 层水平而结束于第 $n-i$ 层水平. 称这种将秩对称和秩单峰的分次偏序集 P 分解为饱和链的方式为对称链分解 (symmetric chain decomposition). 一个对称链分解意味着对任意的 $j \geqslant 1$, j 个反链的并集的最大基数等于 P 中 j 层水平的并集的最大基数 (练习 4.6). (Sperner 性质对应的是 $j=1$ 的情形.) 一个具有挑战性的问题是确定哪些偏序集有对称链分解 (如练习 5.5(b), 练习 5.6 和练习 6.6), 但我们不再在这里深入讨论这一主题.

由于有了以上 Lubell 的漂亮证明和对序匹配 $\mu:(B_n)_i \to (B_n)_{i+1}$ 的确切描述, 读者可能会想知道给出一个更复杂且不直接的线性代数证明的原因是什么. 诚然, 若从我们发展的线性代数方法得到的只是 Sperner 定理的另一种证明, 则这很难有什么价值. 但在下一章中我们将会看到, 当定理 4.7 结合一些有限群论时能得到很多有趣但还没有简单或直接证明的组合结论.

第 4 章注记

偏序集在组合领域全面和更深入的资料, 请见 Caspard-Leclerc-Monjardet [17], P. Fishburn [33], R. Stanley [107, Ch. 3], 以及 W. Trotter [113]. Sperner 定理 (推论 4.8) 最早由 E. Sperner [100] 证明. Lubell 的漂亮证明出现在 [72]. 关于 Sperner 性质的主要参考文献见 K. Engel 的专著 [32]. 有限集合在组合数学中的更多重要结论, 见 I. Anderson [1]. 这里讨论 Sperner 性质的线性代数方法分别由 M. Pouzet [86] (由 Pouzet and Rosenberg [87] 进一步地发展) 和 R. Stanley [101, 103] 独立发现. 有关构造确切序匹配, 对称链分解等的更多信息, 见刚提到的 Anderson 的教材 [1].

第 4 章练习

1. 画出 16 个非同构四元偏序集的 Hasse 图. 一个更有意思的挑战是画出 63 个五元偏序集. 对一些时间充裕的读者, 画出 318 个六元偏序集, 2045 个七元偏序集, 16 999 个八元偏序集, 直到 4 483 130 665 195 087 个十六元偏序集.
2. (a) 设 P 为一个有限偏序集且 $f: P \to P$ 为一个保序双射. 即 f 是一个双射 (单射且满射), 且在 P 中若有 $x \leqslant y$ 则 $f(x) \leqslant f(y)$. 证明 f 是 P 上的一个自同构, 即 f^{-1} 也是一个保序双射. (虽然不是特别有必要, 但读者可以试着应用简单的代

数推理来做.)

(b) 证明当 P 无限时, (a) 中结论不一定成立.

3. 设 $F(q)$ 和 $G(q)$ 为非负实系数的对称和单峰多项式. 证明 $F(q)G(q)$ 也是对称的 (容易) 和单峰的 (困难).

4. 设 q 为一个素数幂, $\mathbb{F}_q$ 表示 q 个元素的有限域. 设 $V = V_n(q) = \mathbb{F}_q^n$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上的 n 维向量空间, 空间向量为 $\mathbb{F}_q$ 中元素的 n 元组. 用 $B_n(q)$ 表示 V 中全部子空间所组成的偏序集, 序为包含关系. 容易看到 $B_n(q)$ 是秩为 n 的分次偏序集, V 中子空间的秩为它的维数.

(a) 画出 $B_3(2)$ 的 Hasse 图. (有 16 个元素.)

(b) (*) 证明 $B_n(q)$ 中秩为 k 的元素个数可由 q-二项式系数 (q-binomial coefficient) 给出:

$$\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}} = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\cdots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\cdots(q-1)}.$$

(c) (*) 证明 $B_n(q)$ 是秩对称的.

(d) 证明每一个元素 $x \in B_n(q)_k$ 覆盖 $(\boldsymbol{k}) = 1+q+\cdots+q^{k-1}$ 个元素且被 $(\boldsymbol{n-k}) = 1+q+\cdots+q^{n-k-1}$ 个元素覆盖.

(e) 定义算子 $U_i\colon \mathbb{R}B_n(q)_i \to \mathbb{R}B_n(q)_{i+1}$ 和 $D_i\colon \mathbb{R}B_n(q)_i \to \mathbb{R}B_n(q)_{i-1}$ 为

$$U_i(x) = \sum_{\substack{y\in B_n(q)_{i+1}\\ y>x}} y$$

$$D_i(x) = \sum_{\substack{z\in B_n(q)_{i-1}\\ z<x}} z.$$

证明

$$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = \big((\boldsymbol{n-i}) - (\boldsymbol{i})\big)I_i.$$

(f) 推导 $B_n(q)$ 是秩单峰的且有 Sperner 性质.

5. (困难) 设 $S_1, S_2, \ldots, S_k$ 为有限集合且有 $\#S_1 = \#S_2 = \cdots = \#S_k$. 设 P 为包含于某一 S_i 的所有集合 T 构成的偏序集, 序为包含关系. 用符号可表示为

$$P = 2^{S_1} \cup 2^{S_2} \cup \cdots \cup 2^{S_k},$$

其中 2^S 表示 S 的子集所组成的集合. 问 P 是否总是秩单峰的?

6. 设 P 是秩对称和秩单峰的偏序集. 证明若 P 有对称链分解, 则对任意的 $j \geqslant 1$, j 个反链的并集的最大基数等于 P 中第 j 层水平的并集的最大基数.

第 5 章　布尔代数的群作用

我们首先复习一下群论中的一些知识. 设 X 是一个 n 元集合且 G 是一个群. 如果对 G 中的每一个元素 π, 可以关联 X 的一个置换 (也记为 π), 使得对所有的 $x \in X$ 和 $\pi, \sigma \in G$ 都有

$$\pi\big(\sigma(x)\big) = (\pi\sigma)(x),$$

那么就称 G 作用于 (act on) 集合 X. 因此 [为什么] G 对 X 的作用就是一个同态 $\varphi\colon G \to \mathfrak{S}_X$, 其中 $\mathfrak{S}_X$ 表示 X 的全部置换构成的对称群. 我们有时将 $\pi(x)$ 写为 $\pi \cdot x$.

5.1 例　(a) 设实数 α 对 xy-平面的作用为将平面绕原点逆时针旋转 α 弧度. 容易验证这定义了实数 (加法) 群 $\mathbb{R}$ 对 xy-平面的一个作用. 作用的核, 即同态 $\varphi\colon \mathbb{R} \to \mathfrak{S}_{\mathbb{R}^2}$ 的核, 是 $\mathbb{R}$ 中由 2π 生成的循环子群.

(b) 现在设 $\alpha \in \mathbb{R}$ 的作用为将平面向右移动距离 α, 即加上 $(\alpha, 0)$. 这得到了 $\mathbb{R}$ 对 xy-平面一个完全不同的作用. 这次的作用是忠实的 (faithful), 即核是平凡子群 $\{0\}$.

(c) 设 $X = \{a, b, c, d\}$, $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2 = \{(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)\}$. 令 G 的作用如下:

$$(0,1) \cdot a = b, \quad (0,1) \cdot b = a, \quad (0,1) \cdot c = c, \quad (0,1) \cdot d = d,$$

$$(1,0) \cdot a = a, \quad (1,0) \cdot b = b, \quad (1,0) \cdot c = d, \quad (1,0) \cdot d = c.$$

读者应该验证这确实定义了一个群作用. 特别地, 因为 $(1,0)$ 和 $(0,1)$ 生成 G, 我们不需要定义 $(0,0)$ 和 $(1,1)$ 的作用——它们是唯一确定的.

(d) 设 X 和 G 同 (c), 但定义的作用为

$$(0,1) \cdot a = b, \quad (0,1) \cdot b = a, \quad (0,1) \cdot c = d, \quad (0,1) \cdot d = c,$$

$$(1,0) \cdot a = c, \quad (1,0) \cdot b = d, \quad (1,0) \cdot c = a, \quad (1,0) \cdot d = b.$$

读者能够验证我们定义了 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 对 $\{a, b, c, d\}$ 的一个作用. 我们刚刚定义的 $G = \mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ 的两种作用差异很大. 例如, 在第一种作用中 X 的一些元素被 G 中非单位元固定 (例如 $(0,1) \cdot c = c$), 而第二种作用没有这个性质. 另见下文中的例 5.2(c)(d), 用另一种基本方法来判别两种作用的不同.

回顾一下, 什么是群 G 对集合 X 的作用的轨道 (orbit). 即对 X 的两个元素 x, y, 若有一个 $\pi \in G$ 使得 $\pi(x) = y$, 则称 x, y 是 G-等价的 (equivalent). G-等价是一个等价关系, 等价类称为轨道. 因此若对某一 $\pi \in G$ 有 $\pi(x) = y$, 则 x 与 y 在同一轨道. 轨道构成了 X 的一个划分 (partition), 即它们是 X 中两两不相交的非空子集, 且它们的并集等于 X. 包含 x 的轨道记为 Gx. 这是一个形象的记号, 因为 Gx 是由所有形如 $\pi(x)$ 的元素构成, 其中 $\pi \in G$. 因此 $Gx = Gy$ 当且仅当 x 和 y 是 G-等价的 (即在同一个 G-轨道中). 所有 G-轨道的集合记做 X/G.

5.2 例 (a) 例 5.1(a) 的轨道是以 $(0,0)$ 为中心的圆, 包括只有一个点 $(0,0)$ 的退化圆.

(b) 例 5.1(b) 的轨道是水平直线. 注意到虽然在 (a) 和 (b) 中同样的群 G 作用于同样的集合 X, 但它们的轨道不同.

(c) 例 5.1(c) 的轨道是 $\{a,b\}$ 和 $\{c,d\}$.

(d) 例 5.1(d) 仅有一个轨道 $\{a,b,c,d\}$. 我们再次遇到了这样的情形, 同一个群 G 以两种不同的方式作用于同一个集合 X, 有不同的轨道.

我们希望考虑情形 $X = B_n$, 即秩为 n 的布尔代数 (这样 $|B_n| = 2^n$). 首先定义偏序集 P 上的一个自同构 (automorphism) 为一个同构映射 φ: $P \to P$. (这个定义与群、环等概念的自同构定义非常相似.) P 的所有自同构的集合构成了一个群, 表示为 $\mathrm{Aut}(P)$, 并称为 P 的自同构群 (automorphism group), 其群运算为函数的复合 (正如对群、环等情形所定义的.)

现在考虑 $P = B_n$ 的情形. $\{1, \ldots, n\}$ 上的任意置换 π 按如下方式作用于 B_n: 若 $x = \{i_1, i_2, \ldots, i_k\} \in B_n$, 则

$$\pi(x) = \{\pi(i_1), \pi(i_2), \ldots, \pi(i_k)\}. \tag{5.1}$$

π 在 B_n 上的这一作用是一个自同构 [为什么]. 特别地, 如果 $|x| = i$, 那么 $|\pi(x)| = i$. 等式 (5.1) 定义了 $\{1, \ldots, n\}$ 的全部置换所构成的对称群 $\mathfrak{S}_n$ 在 B_n 上的作用 [为什么]. (事实上, 不难证明 B_n 的每个 (every) 自同构都有形如 (5.1) 的表达, 其中 $\pi \in \mathfrak{S}_n$.) 特别地, $\mathfrak{S}_n$ 的任意子群 G 都可以按照 (5.1) 的方式作用于 B_n (其中限制 π 属于 G). 下文中的作用总是这种含义.

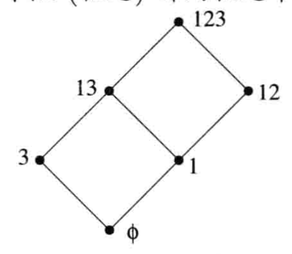
5.3 例 设 $n = 3$, G 为 $\mathfrak{S}_3$ 的子群, G 的元素为 ι 和 $(1,2)$. 此处 ι 表示恒等置换, (在不交的圈记号下) $(1,2)$ 表示对换 1 和 2, 且固定 3 的置换. G (作用于 B_3 上) 共有 6 个轨道. 若将 $\{1,3\}$ 简记为 13, 则 6 个轨道简写为 $\{\emptyset\}$, $\{1,2\}$, $\{3\}$, $\{12\}$, $\{13,23\}$ 和 $\{123\}$.

现在先定义一类我们感兴趣的偏序集. 而后我们将给出一些有独特趣味的特例.

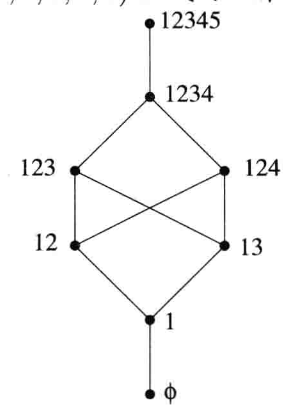
设 G 为 $\mathfrak{S}_n$ 的子群. 定义商偏序集 (quotient poset) B_n/G 如下: B_n/G 的元素为 G

的轨道. 对两个轨道 $\mathfrak{o}$ 和 $\mathfrak{o}'$, 若存在 $x \in \mathfrak{o}$ 和 $y \in \mathfrak{o}'$ 使得在 B_n 中有 $x \leqslant y$, 则在 B_n/G 中定义 $\mathfrak{o} \leqslant \mathfrak{o}'$. 容易验证这一关系 $\leqslant$ 确实是一个偏序.

5.4 例　(a) 设 $n = 3$ 且 G 是如例 5.3描述的由圈 $(1,2)$ 生成的二阶群. 那么 B_3/G 的 Hasse 图可如下表示, 图中的每一个点 (轨道) 都用轨道中的某个元素来标记.



(b) 设 $n = 5$ 且 G 是由圈 $(1,2,3,4,5)$ 生成的五阶群. 则 B_5/G 的 Hasse 图为:



下面是商偏序集 B_n/G 的一个简单性质.

5.5 命题　如上定义的商偏序集 B_n/G 是秩为 n 的分次偏序集并且是秩对称的.

证明　如下事实的简单证明我们留作练习: B_n/G 是秩为 n 的分次偏序集, 且 B_n/G 中元素 $\mathfrak{o}$ 的秩正好就是任意的元素 $x \in \mathfrak{o}$ 在 B_n 中的秩. 因此秩为 i 的元素个数 $p_i(B_n/G)$ 等于轨道 $\mathfrak{o} \in (B_n)_i/G$ 的个数. 如果 $x \in B_n$, 那么用 $\bar{x}$ 表示 x 在集合理论上的补集, 即

$$\bar{x} = \{1, \ldots, n\} - x = \{1 \leqslant i \leqslant n \colon i \notin x\}.$$

从而 $\{x_1, \ldots, x_j\}$ 是 $\{1, \ldots, n\}$ 的一个 i-元子集的轨道当且仅当 $\{\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_j\}$ 是一个 $(n-i)$-元子集的轨道 [为什么]. 因此 $|(B_n)_i/G| = |(B_n)_{n-i}/G|$, 故 B_n/G 是秩对称的. □

设 $\pi \in \mathfrak{S}_n$. 将 π 关联一个线性变换 (仍然用 π 表示) $\pi \colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_i$, 关联法则为:

$$\pi\Bigg(\sum_{x \in (B_n)_i} c_x x\Bigg) = \sum_{x \in (B_n)_i} c_x \pi(x),$$

其中的每一个 c_x 都是实数. 这就定义了 $\mathfrak{S}_n$ 或 $\mathfrak{S}_n$ 的任意子群 G 对向量空间 $\mathbb{R}(B_n)_i$ 的一个作用. π 关于基 $(B_n)_i$ 的矩阵是一个置换矩阵 (permutation matrix), 即每行每列有且仅有一个 1, 其他元素都为 0 的矩阵. 我们感兴趣的是 $\mathbb{R}(B_n)_i$ 中那些被 $\mathfrak{S}_n$ 的子群 G 中所有元素都固定的元素. 将所有这样元素的集合记为 $\mathbb{R}(B_n)_i^G$, 于是

$$\mathbb{R}(B_n)_i^G = \{v \in \mathbb{R}(B_n)_i\colon \text{ 对所有的 } \pi \in G \text{ 有} \pi(v) = v\}.$$

5.6 引理　$\mathbb{R}(B_n)_i^G$ 的一个基由下面这些元素组成:

$$v_{\mathfrak{o}} := \sum_{x \in \mathfrak{o}} x,$$

其中 $\mathfrak{o} \in (B_n)_i/G$, $(B_n)_i/G$ 为 G 作用在 $(B_n)_i$ 上的 G-轨道的集合.

证明　首先注意到若 $\mathfrak{o}$ 是一个轨道且 $x \in \mathfrak{o}$, 则由轨道的定义可知对所有的 $\pi \in G$ (或所有的 $\pi \in \mathfrak{S}_n$) 有 $\pi(x) \in \mathfrak{o}$. 因为 π 重排 $(B_n)_i$ 中的元素, 所以 π 重排 $\mathfrak{o}$ 中的元素. 于是 $\pi(v_{\mathfrak{o}}) = v_{\mathfrak{o}}$, 从而 $v_{\mathfrak{o}} \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$. 因为任意一个 $x \in (B_n)_i$ 仅出现 (带非零系数) 在唯一的一个 $v_{\mathfrak{o}}$ 中, 显然 $v_{\mathfrak{o}}$ 都是线性无关的.

剩下的就是证明 $v_{\mathfrak{o}}$ 生成 $\mathbb{R}(B_n)_i^G$, 即任意的 $v = \sum_{x \in (B_n)_i} c_x x \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$ 能写成 $v_{\mathfrak{o}}$ 的一个线性组合. 给定 $x \in (B_n)_i$, 令 $G_x = \{\pi \in G\colon \pi(x) = x\}$ 为 x 的稳定化子 (stabilizer). 我们将下面这一标准事实留作一个简单练习: $\pi(x) = \sigma(x)$ (其中 $\pi, \sigma \in G$) 当且仅当 π 和 σ 属于 G_x 的同一个左陪集, 即 $\pi G_x = \sigma G_x$. 因此在由元素 $\pi(x)$ 组成的重集中 (其中 π 遍历 G 的所有元素且 x 固定), 仅出现轨道 Gx 中的元素, 且每个元素出现 $\#G_x$ 次. 换句话说,

$$\sum_{\pi \in G} \pi(x) = |G_x| \cdot v_{Gx}.$$

(不要混淆轨道 Gx 与子群 G_x!) 现在将 π 作用于 v, 并对所有的 $\pi \in G$ 求和. 既然 $\pi(v) = v$ (因为 $v \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$), 那么

$$\begin{aligned}
|G| \cdot v &= \sum_{\pi \in G} \pi(v) \\
&= \sum_{\pi \in G} \left(\sum_{x \in (B_n)_i} c_x \pi(x) \right) \\
&= \sum_{x \in (B_n)_i} c_x \left(\sum_{\pi \in G} \pi(x) \right) \\
&= \sum_{x \in (B_n)_i} c_x \cdot (\#G_x) \cdot v_{Gx}.
\end{aligned}$$

上式除以 $|G|$ 后就将 v 表示成了元素 v_{Gx} (或 $v_{\mathfrak{o}}$) 的一个线性组合, 得证. □

现在我们考虑将序提升算子 U_i 作用于 $\mathbb{R}(B_n)_i^G$ 中的元素 v 会有什么效果.

5.7 引理 若 $v \in \mathbb{R}(B_n)_i^G$, 则 $U_i(v) \in \mathbb{R}(B_n)_{i+1}^G$.

证明 注意到因为 $\pi \in G$ 是 B_n 的自同构, 所以在 B_n 中 $x < y$ 当且仅当在 B_n 中有 $\pi(x) < \pi(y)$. 于是 [为什么] 若 $x \in (B_n)_i$ 则

$$U_i\big(\pi(x)\big) = \pi\big(U_i(x)\big).$$

因为 U_i 和 π 都是线性变换, 所以由线性性质知, 对所有的 $u \in \mathbb{R}(B_n)_i$ 有 $U_i\pi(u) = \pi U_i(u)$. 换句话说, $U_i\pi = \pi U_i$. 那么

$$\begin{aligned}\pi\big(U_i(v)\big) &= U_i\big(\pi(v)\big)\\ &= U_i(v),\end{aligned}$$

故 $U_i(v) \in \mathbb{R}(B_n)_{i+1}^G$, 得证. □

下面的定理是本章的主要结果, 也是关于 Sperner 性质的主要结果.

5.8 定理 设 G 是 $\mathfrak{S}_n$ 的子群. 则商偏序集 B_n/G 是秩为 n 的分次偏序集, 且是秩对称、秩单峰和具有 Sperner 性质的.

证明 设 $P = B_n/G$. 在命题 5.5 中已经证明了 P 是秩为 n 的分次偏序集且是秩对称的. 我们希望定义序提升算子 $\hat{U}_i\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ 和序下降算子 $\hat{D}_i\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i-1}$. 首先考虑 $\hat{U}_i$. 思想就是将 $\mathbb{R}B_n^G$ 中的基元 $v_{\mathfrak{o}}$ 等同于 $\mathbb{R}P$ 中的基元 $\mathfrak{o}$, 并且将 $\hat{U}_i\colon \mathbb{R}P_i \to \mathbb{R}P_{i+1}$ 对应于普通的序提升算子 $U_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i \to \mathbb{R}(B_n)_{i+1}$. 更确切地, 假定由 (4.2) 给出的对 B_n 的序提升算子 U_i 满足

$$U_i(v_{\mathfrak{o}}) = \sum_{\mathfrak{o}' \in (B_n)_{i+1}/G} c_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} v_{\mathfrak{o}'}, \tag{5.2}$$

其中 $\mathfrak{o} \in (B_n)_i/G$. (注意到由引理 5.7, $U_i(v_{\mathfrak{o}})$ 确有如 (5.2) 的形式.) 则定义线性算子 $\hat{U}_i\colon \mathbb{R}((B_n)_i/G) \to \mathbb{R}((B_n)_i/G)$ 为

$$\hat{U}_i(\mathfrak{o}) = \sum_{\mathfrak{o}' \in (B_n)_{i+1}/G} c_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} \mathfrak{o}'.$$

注 可将 “U_i 到 $\hat{U}_i$ 的迁移” 描绘为一个交换图表 (commutative diagram):

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}B_n)_i^G & \xrightarrow{U_i} & (\mathbb{R}B_n)_{i+1}^G\\ \cong\big\downarrow & & \big\downarrow\cong\\ \mathbb{R}(B_n/G)_i & \xrightarrow{\hat{U}_i} & \mathbb{R}(B_n/G)_{i+1}\end{array}$$

向下的箭头是由 $v_{\mathfrak{o}} \mapsto \mathfrak{o}$ 导出的线性变换. 从顶端开始, 先向右再往下得到的映射与先往下再往右得到的映射完全一致.

我们断言 $\hat{U}_i$ 是序提升的. 这需要证明若 $c_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} \neq 0$, 则在 B_n/G 中有 $\mathfrak{o}' > \mathfrak{o}$. 因为 $v_{\mathfrak{o}'} = \sum_{x' \in \mathfrak{o}'} x'$, 在 (5.2) 中 $c_{\mathfrak{o},\mathfrak{o}'} \neq 0$ 的唯一方法是对某一 $x' \in \mathfrak{o}'$ 存在 $x \in \mathfrak{o}$ 满足 $x' > x$. 这正好就意味着 $\mathfrak{o}' > \mathfrak{o}$, 因此 $\hat{U}_i$ 是序提升的.

现在进入论证的核心部分了. 我们希望证明对 $i < n/2$, $\hat{U}_i$ 是单射. 由定理 4.7 知, 当 $i < n/2$ 时 U_i 是单射. 因此将 U_i 限制到子空间 $\mathbb{R}(B_n)_i^G$ 上时也是单射. (单射函数的限制映射总是单射.) 除了其作用的基元名字不同以外, U_i 和 $\hat{U}_i$ 是完全一样的变换. 因此当 $i < n/2$ 时 $\hat{U}_i$ 也是一个单射.

对 D_i 可进行完全类似 U_i 的讨论. 对 $i > n/2$, 可以得到单射序下降算子 $\hat{D}_i\colon \mathbb{R}(B_n)_i^G \to \mathbb{R}(B_n)_{i-1}^G$. 由命题 4.4、引理 4.5 以及等式 (4.4) 可得 B_n/G 是秩单峰的和具有 Sperner 性质的. 得证. □

我们将考虑定理 5.8 的两个有趣应用. 第一个应用, 对某一 $m \geqslant 1$, 设 $n = \binom{m}{2}$ 和 $M = \{1, \ldots, m\}$. 令 $X = \binom{M}{2}$ 为 M 的所有二元子集的集合. 可以将 X 的元素看做是顶点集为 M 的简单图的 (可能的) 边. 若 B_X 是 X 的全部子集构成的布尔代数 (这样 B_X 与 B_n 同构), 则 B_X 的元素 x 就是顶点集 M 上的一些边的集合, 换句话说, 正好就是 M 上的一个简单图. 如下定义 $\mathfrak{S}_X$ 的子群 G. 非正式地, G 的成员是所有由顶点 M 的置换导出的边 $\binom{M}{2}$ 的置换. 更确切地, 若 $\pi \in \mathfrak{S}_m$, 则定义 $\hat{\pi} \in \mathfrak{S}_X$ 为 $\hat{\pi} \cdot \{i, j\} = \{\pi \cdot i, \pi \cdot j\}$. 因此 G 同构于 $\mathfrak{S}_m$.

当 G 作用于 B_X 上时, 两个图 $x, y \in B_X$ 什么时候位于同一轨道? 因为 G 中元素仅置换顶点, 所以当通过置换顶点能从 y 得到 x 时, x 与 y 就位于同一轨道. 这恰好是两个简单图 x 与 y 同构 (isomorphic) 的定义——若不考虑顶点名称的不同, 它们是同一个图 (将边看做是顶点对). 因此 B_X/G 的元素就是顶点集为 M 的简单图的同构类 (isomorphism class). 特别地, $\#(B_X/G)$ 是 m 个顶点的非同构简单图的数目, 且 $\#(B_X/G)_i$[①] 是具有 i 条边的这种非同构图的数目. 若存在某种标记 x 和 y 的顶点的方法使得 x 的每条边都是 y 的边, 则称在 B_X/G 中 $x \leqslant y$. 等价地, y 的某个生成子图 (spanning subgraph) (即 y 的包含其全部顶点的子图) 同构于 x, 图 5.1 展示了 $m = 4$ 的例子. 因此由定理 5.8 可得如下这个决不显然且只有代数证明的结论.

5.9 定理 (a) 固定 $m \geqslant 1$. 设 p_i 为 m 个顶点和 i 条边的非同构简单图的数目. 则序列 $p_0, p_1, \ldots, p_{\binom{m}{2}}$ 是对称和单峰的.

(b) 设 T 为一些有 m 个顶点的简单图的集合, 且 T 中没有元素同构于 T 中另一元素

① 易知与前面用到的符号 $\#(B_X)_i/G$ 等价.——译者注

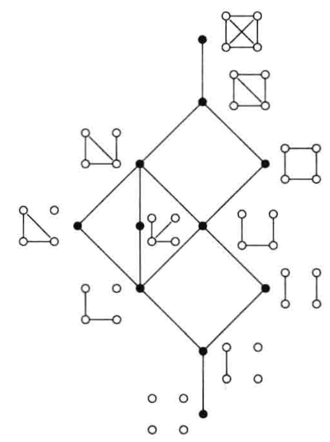


图 5.1　4 顶点非同构图的偏序集 B_X/G

的生成子图. 则当 T 由所有 $\lfloor \frac{1}{2}\binom{m}{2} \rfloor$ 条边的非同构简单图组成时, $\#T$ 取到最大.

应用定理 5.8 的第二个例子会更加巧妙, 并且将是下一章的主题.

题外话　边重构. 学者们在“重构问题”上已经做了很多工作, 即试图重构一个数学结构, 例如从图的子结构重构一个图. 这类问题中最著名的当属顶点重构 (vertex reconstruction): 给定一个简单图 G, 其 p 个顶点为 $v_1, \ldots, v_p$, 令 G_i 为去掉顶点 v_i (以及 v_i 的所有邻边) 后得到的子图. 对点删除子图构成的给定重集 $\{G_1, \ldots, G_p\}$, G 能否被唯一地重构? 重要的一点是在顶点都是无标号的 (unlabelled) 情形下实现这一目标, 于是若给定 G_i, 我们并不知道对任意的 j 哪个顶点是 v_j. 著名的顶点重构猜想 (vertex reconstruction conjecture)(仍然悬而未决) 是说对 $p \geqslant 3$, 任意的图 G 都能由重集 $\{G_1, \ldots, G_p\}$ 重构.

这里我们关心的是另一个公开问题——边 (edge) 重构. 给定一个简单图 G, 其边为 $e_1, \ldots, e_q$, 令 $H_i = G - e_i$ 是在 G 中将边 e_i 移除后得到的图.

边重构猜想　简单图 G 能从它顶点的数目以及边删除子图构成的重集 $\{H_1, \ldots, H_q\}$ 唯一地重构.

注　如同顶点重构, 子图 H_i 都是非标号的. 需要顶点数的原因是对任意一个没有边的图, 有 $\{H_1, \ldots, H_q\} = \emptyset$, 因此需要确定顶点数以得到 G.

注　能够证明若 G 能够顶点重构, 则 G 能边重构. 因此, 顶点重构猜想蕴含了边重构猜想.

上文中发展的技巧——分析群在布尔代数上的作用, 能用来证明边重构猜想的一个特例. 注意到 p 个顶点的简单图至多有 $\binom{p}{2}$ 条边.

5.10 定理　设 G 为 p 个顶点的简单图, 且有 $q > \frac{1}{2}\binom{p}{2}$ 条边. 则 G 可边重构.

证明　设 P_q 是顶点集为 $[p] = \{1, 2, \ldots, p\}$, 边数为 q 的所有简单图的集合, 这样 $\#P_q =$

$\binom{\binom{p}{2}}{q}$). 用 $\mathbb{R}P_q$ 表示基为 P_q 的实向量空间. 定义一个线性变换 $\psi_q\colon \mathbb{R}P_q \to \mathbb{R}P_{q-1}$ 为

$$\psi_q(\Gamma) = \Gamma_1 + \cdots + \Gamma_q,$$

其中 $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_q$ 是将 Γ 去掉一条边后所得的 (非标号) 图. 由定理 4.7 知, 当 $q > \frac{1}{2}\binom{p}{2}$ 时 ψ_q 是单射. (将 ψ_q 看做是对 Γ 的补图 (complement) 加边, 补图即为顶点集是 $[p]$ 且边集是 $\binom{[p]}{2} - E(\Gamma)$ 的图.)

对称群 $\mathfrak{S}_p$ 以置换顶点的方式作用在 P_q 上, 因此也作用在基为 P_q 的实向量空间 $\mathbb{R}P_q$ 上. 不变空间 $(\mathbb{R}P_q)^{\mathfrak{S}_p}$ 的基由一些不同的和式 $\tilde{\Gamma} = \sum_{\pi\in\mathfrak{S}_p} \pi(\Gamma)$ 所组成, 其中 $\Gamma \in P_q$. 因为 $\tilde{\Gamma} = \tilde{\Gamma'}$ 当且仅当 Γ 与 Γ' 同构, 所以可以认为 $\tilde{\Gamma}$ 与同构于 Γ 的无标号图等同. 正如定理 5.8 证明中的做法, 对 $q > \frac{1}{2}\binom{p}{2}$, 将 ψ_q 限制到 $(\mathbb{R}P_q)^{\mathfrak{S}_p}$ 上时, 我们就得到了一个单射 $\psi_q\colon (\mathbb{R}P_q)^{\mathfrak{S}_p} \to (\mathbb{R}P_{q-1})^{\mathfrak{S}_p}$. 特别地, 对 p 个顶点的非同构无标号图 $\tilde{\Gamma}$ 和 $\tilde{\Gamma}'$, 我们有

$$\tilde{\Gamma}_1 + \cdots + \tilde{\Gamma}_q = \psi_q(\tilde{\Gamma}) \neq \psi_q(\tilde{\Gamma}') = \tilde{\Gamma}'_1 + \cdots + \tilde{\Gamma}'_q.$$

因此无标号图 $\tilde{\Gamma}_1, \ldots, \tilde{\Gamma}_q$ 决定了 $\tilde{\Gamma}$, 得证. □

实根多项式 除了定理 5.8 证明中的线性代数方法, 还有很多技巧可以用来证明序列是单峰的. 这里我们讨论一个基于简单分析 (运算) 的技巧来证明序列是单峰的. 事实上, 我们将考虑一个比单峰性更强的性质.

一个实数序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n$, 若对 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 都有 $a_i^2 \geqslant a_{i-1}a_{i+1}$, 则称此序列为*对数性凹的* (logarithmically concave), 或简称 *log-凹* (log-concave). 若对 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 有 $b_i^2 \geqslant b_{i-1}b_{i+1}$, 则称 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是*强 log-凹* (strongly log-concave), 其中 $b_i = a_i/\binom{n}{i}$. 强 log-凹性等价于 [为什么]

$$a_i^2 \geqslant \left(1 + \frac{1}{i}\right)\left(1 + \frac{1}{n-i}\right) a_{i-1}a_{i+1}, \quad 1 \leqslant i \leqslant n-1,$$

从这里可以看出强 log-凹性蕴含 log-凹性.

现在假设每一个 $a_i \geqslant 0$. 问是否 log-凹性蕴含单峰性? 答案是否定的, 一个反例是 $1, 0, 0, 1$. 然而, 仅能出现这种类型的反例, 我们马上会解释. 称一个序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *无内部零点* (no internal zero), 如果对任意的 $i < j < k$, $a_i \neq 0$ 和 $a_k \neq 0$ 蕴含 $a_j \neq 0$.

5.11 命题 *设 $\alpha = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$ 为一个非负实数序列且无内部零点. 若 α 是 log-凹的, 则它是单峰的.*

证明 若仅有两个不同的 j 使得 $a_j \neq 0$, 则总有 $a_{i-1}a_{i+1} = 0$, 命题显然成立. 现在假定至少有三个不同的 j 使得 $a_j \neq 0$, 用反证法证明命题. 则存在 $1 \leqslant i \leqslant n-1$ 使得 $a_{i-1} > a_i \leqslant a_{i+1}$ 且 $a_{i+1} > 0$, 因此 $a_i^2 < a_{i-1}a_{i+1}$, 矛盾. □

这里有一个基本的方法来证明 log-凹性.

5.12 定理 (I. Newton) 设

$$P(x)=\sum_{i=0}^{n}b_ix^i=\sum_{i=0}^{n}\binom{n}{i}a_ix^i$$

为实系数多项式, 其根都是实数. 则序列 $b_0,b_1,\ldots,b_n$ 是强 log-凹的, 或等价地, 序列 a_0, a_1, $\ldots$, a_n 是 log-凹的. 进一步地, 若每一个 $b_i\geqslant 0$ (这样 $P(x)$ 的根都非正 [为什么]), 则序列 $b_0,b_1,\ldots,b_n$ 无内部零点.

证明 设 $\deg P(x)=m\leqslant n$. 由代数基本定理知, $P(x)$ 恰有 m 个 (计算重数的) 实根. 假设 α 是 $r>1$ 重根, 则存在某一满足 $L(\alpha)\neq 0$ 的多项式 $L(x)$, 使得 $P(x)=(x-\alpha)^rL(x)$. 简单计算可证 α 是 $P'(x)$ ($P(x)$ 的导数) 的 $r-1$ 重根. 进一步地, 若 $\alpha<\beta$ 都是 $P(x)$ 的根, 则由 Rolle 定理可证明 $P'(x)$ 有一个根 γ 满足 $\alpha<\gamma<\beta$. 于是 [为什么] $P'(x)$ 至少有 $m-1$ 个实根. 因为 $\deg P'(x)=m-1$, 所以 $P'(x)$ 恰有 $m-1$ 个实根而无别的根.

设 $Q(x)=\frac{\mathrm{d}^{i-1}}{\mathrm{d}x^{i-1}}P(x)$. 因此 $Q(x)$ 是次数至多为 $m-i+1$ 的仅有实根的多项式. 设 $R(x)=x^{m-i+1}Q(1/x)$, 它也是一个次数至多为 $m-i+1$ 的多项式. $R(x)$ 的根正好就是 $Q(x)$ 非零根的倒数, 但有可能有等于 0 的新根. 无论如何, $R(x)$ 的所有根都是实数. 设 $S(x)=\frac{\mathrm{d}^{m-i-1}}{\mathrm{d}x^{m-i-1}}R(x)$, 它是次数至多为 2 次的多项式. 由 Rolle 定理 (如上适当处理重根情形), $S(x)$ 的每个根都是实数. 经过详细的计算可得

$$S(x)=\frac{m!}{2}(a_{i-1}x^2+2a_ix+a_{i+1}).$$

若 $a_{i-1}=0$, 则显然 $a_i^2\geqslant a_{i-1}a_{i+1}$. 否则 $S(x)$ 是一个二次多项式. 因为 $S(x)$ 有实根, 所以它的判别式 Δ 非负. 即

$$\Delta=(2a_i)^2-4a_{i-1}a_{i+1}=4(a_i^2-a_{i-1}a_{i+1})\geqslant 0,$$

因此序列 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 是 log-凹的.

剩下的就是证明若每一个 $a_i\geqslant 0$, 则序列 $a_0,a_1,\ldots,a_n$ 无内部零点. 反之, 设存在 $i<j<k$ 使得 $a_i>0,a_j=0,a_k>0$. 如同上个段落的讨论, 可得一个形如 $c+dx^{k-i}$ 的仅有实根的多项式, 其中 $c,d>0$. 但由 $k-i\geqslant 2$ 可推知每一个这种多项式都有非实数的根 [为什么], 矛盾. 定理得证. □

为了给出定理 5.12 的组合应用, 我们需要寻找仅有实根的多项式, 而其系数具有组合意义. 练习 9.8 给出了这样的一个例子, 基于对称矩阵的特征多项式仅有实根这一事实.

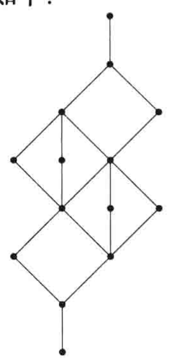
第 5 章注记

本章中的技巧起源于 L. H. Harper [53] 以及 M. Pouzet and I. G. Rosenberg 的文章 [87]. 与本章最接近的处理方法出现在 R. Stanley 的文章 [103] 中. 该文章也包括了这里给出的定理 5.10 (边重构) 的证明. 这一结论最早是由 L. Lovász [70] 通过容斥原理证明. 定理 5.10 中的条件 $q > \frac{1}{2}\binom{p}{2}$, 由 V. Müller [78] (推广 Lovász 的方法) 以及 I. Krasikov and Y. Roditty [66] (推广 Stanley 的方法) 改进到了 $q > p(\log_2 p - 1)$.

关于牛顿定理 5.12 的更多信息, 见文献 G. H. Hardy, J. E. Littlewood 和 G. Pólya [52, p. 52]. 关于单峰性, log-凹性等内容的一般性综述, 见 Stanley [105] 以及 F. Brenti [12] 的续篇.

第 5 章练习

1. (a) 设 $G = \{\iota, \pi\}$ 为一个二阶群 (单位元为 ι). 设 G 在 $\{1,2,3,4\}$ 上的作用为 $\pi\cdot 1 = 2$, $\pi\cdot 2 = 1$, $\pi\cdot 3 = 3$, $\pi\cdot 4 = 4$. 画出商偏序集 B_4/G 的 Hasse 图.
   (b) 若作用为 $\pi\cdot 1 = 2$, $\pi\cdot 2 = 1$, $\pi\cdot 3 = 4$, $\pi\cdot 4 = 3$, 也画出相应的 Hasse 图.
2. 5 顶点非同构简单图构成的偏序集 (序为子图包含关系), 画出其 Hasse 图. 它的最大反链的大小是多少? 有多少这样大小的反链?
3. 例举一个具有 Sperner 性质的有限分次偏序集 P, 连同群 G 作用在 P 上, 要求商偏序集 P/G 不具有 Sperner 性质. (由定理 5.8, P 不能是布尔代数.)
4. 考虑一个偏序集 P, 其 Hasse 图如下:



   找寻对称群 $\mathfrak{S}_7$ 的一个子群 G, 使得 $P \cong B_7/G$, 或证明这样的群不存在.
5. 长度 (length) 为 n 权 (weight) 为 i 的 $(0,1)$-项链 (necklace) 是对 i 个 1 和 $n-i$

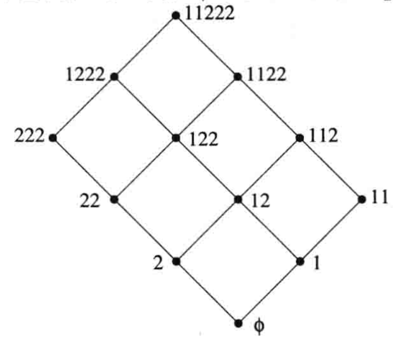
个 0 的一个圆排列. 例如, 长度为 6 权为 3 的 $(0,1)$-项链 (线性地写出一个圆排列) 有 000111, 001011, 010011 和 010101. (线性字的循环移位表示同一条项链, 例如, 000111 和 110001 相同.) 用 N_n 表示长度为 n 的所有 $(0,1)$-项链的集合. 定义 N_n 上的偏序 $u \leqslant v$ 为: 若可将 u 中的一些 0 变为 1 得到 v. 容易看到 (读者也可以这么假设) N_n 是秩为 n 的分次偏序集, 且任意一条项链的秩为它的权.

(a) (*) 证明 N_n 是秩对称、秩单峰且具有 Sperner 性质的.

(b) (困难) 证明 N_n 具有 "第 4 章注记" 之前定义的对称链分解.

6. (未解决) 证明任何商偏序集 B_n/G 都有对称链分解.

7. 设 M 为一个有限重集, 对 $1 \leqslant i \leqslant k$ 它有 a_i 个 i. 用 B_M 表示由 M 的所有子重集构成的偏序集, 序为重集的包含关系. 例如, 下图展示了 $a_1 = 2$, $a_2 = 3$ 的情形.



应用定理 5.8 证明 B_M 是秩对称、秩单峰且具有 Sperner 性质的. (还有别的方法来解决这个问题, 但这里要求利用定理 5.8. 因此读者需要找到适当的 n 和 $\mathfrak{S}_n$ 的一个子群 G, 使得 $B_M \cong B_n/G$.)

8. (未解决) 设 G 是与定理 5.9 相关的群, 故 G 作用于 B_X, 其中 X 由一个 m 元集合的所有二元子集构成. 对 $i < \frac{1}{2}\binom{m}{2}$ 寻找一个确切的序匹配 $\mu\colon (B_X/G)_i \to (B_X/G)_{i+1}$. 即使找到一个确切的单射 $(B_X/G)_i \to (B_X/G)_{i+1}$ 这一弱化的问题也没有解决.

9. (a) (*) 设 $\mathcal{G}_p$ 为顶点集 $[p]$ 上的所有简单图构成的集合, 则 $\#\mathcal{G}_p = 2^{\binom{p}{2}}$. 给定一个图 $G \in \mathcal{G}_p$, 令 G_i 是将顶点 i **转接** (switching) 后得到的图, 即去掉与顶点 i 相连的所有边, 再对顶点 i 加上不属于 G 的边. 定义线性变换

$$\varphi\colon \mathbb{R}\mathcal{G}_p \to \mathbb{R}\mathcal{G}_p$$

为 $\varphi(G) = G_1 + \cdots + G_p$. 证明 φ 是可逆的当且仅当 $p \not\equiv 0 \pmod 4$.

(b) 若图 G 能从无标号的顶点转接图 G_i (也就是, 给出的图 G_i 都是无标号的) 构成的重集唯一地重建, 则称它是**可转接重建的** (switching reconstructible). 证明当 $p \not\equiv 0 \pmod 4$ 时, G 是可转接重建的.

(c) (未解决) 证明当 $p \neq 4$ 时, G 都是可转接重建的.

(d) 证明当 $p \neq 4$ 时, G 的边数能由无标号的 G_i 构成的重集唯一确定. 找出两个有不同边数的四顶点图, 但它们有相同的无标号 G_i.

(e) 若图 G 能由标号顶点转接图 G_i (也就是, 给出的图 G_i 都是标号图, 但不知道哪个顶点 i 被转接了) 构成的重集唯一地重建, 则称 G 是可弱转接重建的 (weakly switching-reconstructible). 证明当 $p \neq 4$ 时 G 都是可弱转接重建的, 但当 $p = 4$ 时 G 不一定是可弱转接重建的.

10. 假设 X 是一个有限 n 元集合, G 是 X 上的置换群. 因此 G 可作用在 X 的子集上. 若对任意的两个 j 元子集 S 和 T, 存在一个 $\pi \in G$ 使得 $\pi \cdot S = T$, 则称 G 传递地 (transitive) 作用于 j 元子集上. 证明对某个 $j \leqslant n/2$, 若 G 传递地作用于 j 元子集上, 则对所有的 $0 \leqslant i \leqslant j$, G 传递地作用于 i 元子集上. (虽然这个问题能被直接解决, 但应用本文中的结论可以给出非常简单的证明.)

11. 例 5.4(b) 是画出了 B_5/G 的 Hasse 图, 其中 G 是由圈 $(1,2,3,4,5)$ 生成的群. 用图中所示的点标号, 确切地计算 $\widehat{U}_2(12)$ 和 $\widehat{U}_2(13)$, 要求结果表示成的 123 和 124 的线性组合, 其中 $\widehat{U}_2$ 如定理 5.8 的证明中所定义. $\widehat{U}_2$ 关于基 $(B_5/G)_2$ 和 $(B_5/G)_3$ 的矩阵是什么?

12. 若实系数多项式 $F(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ 的系数序列 $a_0, a_1, \ldots, a_n$ 是 log-凹的, 则称该多项式为 log-凹的 (log-concave). 设 $F(x)$ 和 $G(x)$ 都是正系数的 log-凹多项式. 证明 $F(x)G(x)$ 也是正系数的 log-凹多项式.

13. (*) 设 $F(x)$ 是首项系数为正数的实系数多项式, 其根都是形如 $r\mathrm{e}^{i\theta}$ 的极形式, 其中 $\frac{2\pi}{3} \leqslant \theta \leqslant \frac{4\pi}{3}$. 证明 $F(x)$ 的系数都是正数和 log-凹的.

第6章　杨图和 q-二项式系数

整数 $n \geqslant 0$ 的一个分拆 (partition) 是一个整数序列 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$, 其中 $\lambda_i \geqslant 0$ 且满足 $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \cdots$ 和 $\sum_{i \geqslant 1} \lambda_i = n$. 因此除有限多个 λ_i 外, 其他 λ_i 都等于 0. 称每一个 $\lambda_i > 0$ 为 λ 的一个分量 (part). 我们有时省略等于 0 的 λ_i, 例如, $(5,2,2,1)$, $(5,2,2,1,0,0,0)$ 和 $(5,2,2,1,0,0,\dots)$ 都表示同一个 (有 4 个分量的 10 的) 分拆 λ. 若 λ 是 n 的一个分拆, 则可表示成 $\lambda \vdash n$ 或 $|\lambda| = n$.

6.1 例　5 有 7 个分拆, 即 (用简记 $(2,2,1)$ 为 221 的方式): 5, 41, 32, 311, 221, 2111 以及 11111.

整数分拆这一课题已经被广泛地研究, 我们这里仅关注与之前的讨论有关的一小部分. 对给定的正整数 m 和 n, 用 $L(m,n)$ 表示至多有 m 个分量且最大分量至多为 n 的所有分拆的集合. 例如, $L(2,3) = \{\emptyset, 1, 2, 3, 11, 21, 31, 22, 32, 33\}$. (注意到我们用 $\emptyset$ 表示没有分量的唯一分拆 $(0,0,\dots)$.) 对分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ 和 $\mu = (\mu_1, \mu_2, \dots)$, 若对所有的 i 都有 $\lambda_i \leqslant \mu_i$, 则定义 $\lambda \leqslant \mu$. 这就使得所有分拆的集合构成了一个非常有趣的偏序集, 记为 Y 并称为杨格 (Young's lattice) (以英国数学家 Alfred Young 的名字命名, 873–1940). (称它为"杨格"而不是"杨偏序集"是因为它具有一些特定性质从而构成了格 (lattice). 然而, 在这里这些性质与我们无关, 因此我们将不定义格的概念.) 我们将在第 8 章考察 Y 的一些性质. Y 上的偏序, 当限制到 $L(m,n)$ 上时, 就使 $L(m,n)$ 成了一个也具有迷人性质的偏序集. 图 6.1 展示了 $L(1,4)$, $L(2,2)$ 和 $L(2,3)$, 图 6.2 展示了 $L(3,3)$.

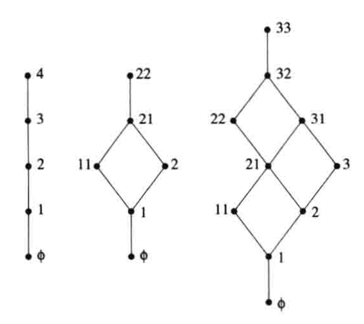


图 6.1　偏序集 $L(1,4)$, $L(2,2)$ 以及 $L(2,3)$

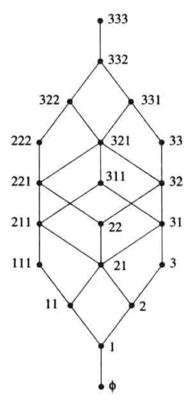
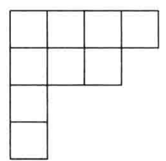


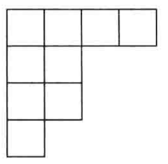
图 6.2　偏序集 $L(3,3)$

有一个很好的几何方法来图示化分拆和偏序集 $L(m,n)$. 分拆 λ 的杨图 (Young diagram) (有时仅称为图 (diagram)) 是一系列左对齐的正方形, 在第 i 行有 λ_i 个正方形. 例如, $(4,3,1,1)$ 的杨图为:



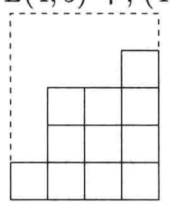
若用点来代替方格, 则称得到的图为 Ferrers 图 (Ferrers diagram). 因此 $(4,3,1,1)$ 的 Ferrers 图为:

杨图胜于 Ferrers 图的地方是能在杨图的方格中填写数字, 我们将在第8章中进行这样的操作. 注意到 $L(m,n)$ 就是容纳在 $m \times n$ 矩形中的杨图 D 的集合 (其中 D 的左上角 (西北角) 与矩形的西北角相同), 序为包含关系. 我们总假设当一个杨图包含在矩形 R 中时, 它们的西北角相同 (We will always assume that when a Young diagram D is contained in a rectangle R, the northwest corners agree). 从杨图的视角可以很清晰地看到 $L(m,n)$ 与 $L(n,m)$ 是同构的偏序集, 同构映射为将图转置 (即行与列互换). 如果 λ 的杨图为 D, 那么图为 D^t (D 的转置) 的分拆称为 λ 的共轭 (conjugate), 表示为 λ'. 例如, $(4,3,1,1)' = (4,2,2,1)$, 它的图为:



6.2 命题 偏序集 $L(m,n)$ 是秩为 mn 的分次的和秩对称的偏序集. 分拆 λ 的秩为 $|\lambda|$ (即 λ 的所有分量的和, 或它的杨图的方格数).

证明 如命题 5.5 的证明, 除了秩对称性外的其他性质留给读者证明. 为证明秩对称性, 考虑 λ 在 $m\times n$ 的矩形 R 中的补集 $\bar{\lambda}$, 即 R 中除去 λ 后剩余的全部方格. (注意到 $\bar{\lambda}$ 不仅与 λ 有关, 还与 m 和 n 有关.) 例如, 在 $L(4,5)$ 中, $(4,3,1,1)$ 的补集为:



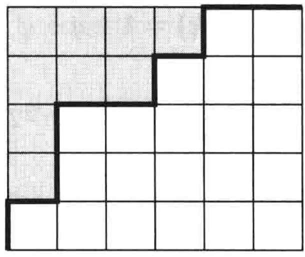
如果将 $\bar{\lambda}$ 的图形旋转 180°, 那么就得到满足 $|\lambda|+|\tilde{\lambda}|=mn$ 的分拆 $\tilde{\lambda}\in L(m,n)$ 的图. 这种 λ 与 $\tilde{\lambda}$ 间的对应就证明了 $L(m,n)$ 是秩对称的. □

本章的主要目标是证明 $L(m,n)$ 是秩单峰的和具有 Sperner 性质的. 将 $p_i(L(m,n))$ ($L(m,n)$ 中秩为 i 的元素的个数) 简记为 $p_i(m,n)$. 等价地, $p_i(m,n)$ 是最大分量为 n 且至多有 m 个分量的 i 的分拆的数目, 或者, 换句话说, 是容纳在 $m\times n$ 矩形中的有 i 个方格的不同杨图 (如上所述, 它们具有相同的西北角) 的数目. 虽然对我们的目标不是很必要, 但是得到数目 $p_i(m,n)$ 的一些信息仍然是有趣的. 首先来考虑 $L(m,n)$ 的元素总数 $\#L(m,n)$.

6.3 命题 $\#L(m,n)=\binom{m+n}{m}$.

证明 我们将给出一个基于如下事实的优美的组合证明: $\binom{m+n}{m}$ 等于序列 $a_1,a_2,\ldots,a_{m+n}$ 的数目, 其中任意 a_j 取 N 或 E, 且序列中共有 m 个 N (因此有 n 个 E). 我们将包含在 $m\times n$ 矩形 R 中的杨图 D 与上述序列按以下这种方式关联起来. 我们从 R 的左下角出发, 向北或向东移动, 并沿 D 的东南边界行走, 直至到达 R 的右上角. 由此就得到了一个每步或向北或向东的单位步伐的序列 (R 中的每一个正方形的边长都是一个单位). 记录下序列的每一步, 用 N 表示向北的步, 用 E 表示向东的步.

例子 设 $m=5$, $n=6$, $\lambda=(4,3,1,1)$. 则 R 和 D 为:



对应的 N 和 E 的序列为 $NENNEENENENEE$.

容易看到 (留给读者) 以上的对应给出了容纳于 $m \times n$ 矩形 R 中的杨图 D 与有 m 个 N 和 n 个 E 的序列之间的一个双射. 因此图的数目等于序列的数目 $\binom{m+n}{m}$. □

现在考虑 $L(m,n)$ 中有多少个元素的秩等于 i. 为此, 设 q 为一个不定元; 并对给定的 $j \geqslant 1$ 定义 $(\boldsymbol{j}) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{j-1}$. 于是有 $(\boldsymbol{1}) = 1$, $(\boldsymbol{2}) = 1 + q$, $(\boldsymbol{3}) = 1 + q + q^2$, 等等. 注意到 $(\boldsymbol{j})$ 是一个关于 q 的多项式, 它在 $q = 1$ 时的值正好是 j (记为 $(\boldsymbol{j})_{q=1} = j$). 下面对 $j \geqslant 1$ 定义 $(\boldsymbol{j})! = (\boldsymbol{1})(\boldsymbol{2})\cdots(\boldsymbol{j})$, 并设 $(\boldsymbol{0})! = 1$. 故有 $(\boldsymbol{1})! = 1$, $(\boldsymbol{2})! = 1 + q$, $(\boldsymbol{3})! = (1+q)(1+q+q^2) = 1 + 2q + 2q^2 + q^3$, 等等, 且 $(\boldsymbol{j})!_{q=1} = j!$. 最后对 $k \geqslant j \geqslant 0$ 定义

$$\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}} = \frac{(\boldsymbol{k})!}{(\boldsymbol{j})!(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})!}.$$

称表达式 $\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}}$ 为一个 *q-二项式系数* (*q*-binomial coefficient) (或*高斯系数*).

将 q 看做是一个素数幂而非不定元时, 练习 4.4 给出了 $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ 的一个基于域 $\mathbb{F}_q$ 的定义. 本章我们不需要 $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ 的这个代数解释.

因为 $(\boldsymbol{r})!_{q=1} = r!$, 显而易见

$$\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}}_{q=1} = \binom{k}{j}.$$

有时称 $\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}}$ 是二项式系数 $\binom{k}{j}$ 的一个 “q-模拟”. 关于某一数学对象 P (例如一个公式或者定义) 的 q-模拟 $P(q)$ 并没有明确的定义, 但它具有的基本性质是, $P(1)$ 可以合理地解释为 P. 最理想的是, 当 q 被视为素数幂时, $P(q)$ 应该有某一涉及 $\mathbb{F}_q$ 的解释. 集合 $\{1\}$ 的 q-模拟是有限域 $\mathbb{F}_q$, 集合 $[n] = \{1, 2, \ldots, n\}$ 的 q-模拟是向量空间 $\mathbb{F}_q^n$.

6.4 例 我们有 $\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}} = \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}}$ [为什么]. 此外,

$$\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{0}} = \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}} = 1,$$

$$\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{1}} = \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}} = (\boldsymbol{k}) = 1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1},$$

$$\binom{\boldsymbol{4}}{\boldsymbol{2}} = \frac{(\boldsymbol{4})(\boldsymbol{3})(\boldsymbol{2})(\boldsymbol{1})}{(\boldsymbol{2})(\boldsymbol{1})(\boldsymbol{2})(\boldsymbol{1})} = 1 + q + 2q^2 + q^3 + q^4,$$

$$\binom{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{2}} = \binom{\boldsymbol{5}}{\boldsymbol{3}} = 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + 2q^4 + q^5 + q^6.$$

在以上的例子中, $\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}}$ 总是关于 q 的一个多项式 (并且有非负整数的系数). 这个性质并不显然总成立, 但从下面这个引理容易推知.

6.5 引理　对 $k \geqslant 1$

$$\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}} = \binom{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{j}} + q^{k-j}\binom{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1}}, \tag{6.1}$$

其初始条件为 $\binom{\boldsymbol{0}}{\boldsymbol{0}} = 1$, 若 $j < 0$ 或 $j > k$, 则 $\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}} = 0$(二项式系数 $\binom{k}{j}$ 满足同样的初始条件).

证明　直接计算即可证明. 具体地, 我们有

$$\begin{aligned}
\binom{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{j}} + q^{k-j}\binom{\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1}} &= \frac{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})!}{(\boldsymbol{j})!(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}-\boldsymbol{j})!} + q^{k-j}\frac{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})!}{(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1})!(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})!} \\
&= \frac{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})!}{(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1})!(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}-\boldsymbol{j})!}\left(\frac{1}{(\boldsymbol{j})} + \frac{q^{k-j}}{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})}\right) \\
&= \frac{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})!}{(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1})!(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}-\boldsymbol{j})!}\frac{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j}) + q^{k-j}(\boldsymbol{j})}{(\boldsymbol{j})(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})} \\
&= \frac{(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1})!}{(\boldsymbol{j}-\boldsymbol{1})!(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{1}-\boldsymbol{j})!}\frac{(\boldsymbol{k})}{(\boldsymbol{j})(\boldsymbol{k}-\boldsymbol{j})} \\
&= \binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}}.
\end{aligned}$$

□

注意到若在 (6.1) 中令 $q = 1$, 可得如下这个著名的公式

$$\binom{k}{j} = \binom{k-1}{j} + \binom{k-1}{j-1},$$

这正好是定义 Pascal 三角形的递归式. 因此等式 (6.1) 可以看成是 Pascal 三角形递归式的一个 q-模拟.

可以将等式 (6.1) 看做是 q-二项式系数的一个递归关系. 给定引理 6.5 中的初始条件, 对任意的 k 和 j, 我们可以通过 (6.1) 来递归计算 $\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}}$. 由此应用归纳法易知 q-二项式系数 $\binom{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{j}}$ 是一个关于 q 的多项式, 且其系数为非负整数. 下面这个定理给出了一个更强的结论, 即这些系数的一个具体的组合解释.

6.6 定理　设 $p_i(m,n)$ 表示 $L(m,n)$ 中秩为 i 的元素个数. 则

$$\sum_{i \geqslant 0} p_i(m,n)q^i = \binom{\boldsymbol{m}+\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{m}}. \tag{6.2}$$

注　左边的和式确实是一个有限 (finite) 和, 因为对 $i > mn$ 有 $p_i(m,n) = 0$.

证明　用 $P(m,n)$ 表示等式 (6.2) 的左边. 我们将证明

$$P(0,0) = 1,\ \text{且对} m < 0 \text{或} n < 0, P(m,n) = 0, \tag{6.3}$$

$$P(m,n) = P(m,n-1) + q^n P(m-1,n). \tag{6.4}$$

注意到等式 (6.3) 和等式 (6.4) 完全决定了 $P(m,n)$. 另一方面, 在等式 (6.1) 中做替换 $k = m+n$ 和 $j = m$, 显示 $\binom{m+n}{m}$ 也满足等式 (6.4). 进一步地, 引理 6.5 的初始条件显示 $\binom{m+n}{m}$ 同样满足等式 (6.3). 因此等式 (6.3) 和等式 (6.4) 就蕴含了 $P(m,n) = \binom{m+n}{m}$, 所以若要完成证明我们仅需要证明等式 (6.3) 和等式 (6.4).

等式 (6.3) 容易说明, 因为 $L(0,n)$ 由一个单点组成 (空分拆 $\emptyset$), 因此 $\sum_{i\geqslant 0} p_i(0,n)q^i = 1$; 若 $m<0$ 或 $n<0$, 则 $L(m,n)$ 是空集 (或者是某些读者偏好的“无定义的”).

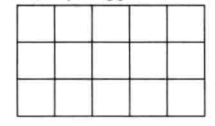
证明的关键点是等式 (6.4). 取等式 (6.4) 两端 q^i 项前的系数, 能看到 [为什么] 等式 (6.4) 等价于

$$p_i(m,n) = p_i(m,n-1) + p_{i-n}(m-1,n). \tag{6.5}$$

考虑一个分拆 $\lambda \vdash i$, 其杨图 D 容纳于一个 $m\times n$ 矩形 R 中. 若 D 不包含 R 的右上角, 则 D 实际上容纳于一个 $m\times(n-1)$ 矩形中, 因此有 $p_i(m,n-1)$ 个这样的分拆 λ. 另一方面, 若 D 包含 R 的右上角, 则 D 包含 R 的整个第一行. 当我们去掉 R 的第一行后, 剩下的就是容纳于 $(m-1)\times n$ 矩形中大小为 $i-n$ 的一个杨图. 因此共有 $p_{i-n}(m-1,n)$ 个这样的 λ, 得证 [为什么]. □

注意到如果在等式 (6.2) 中令 $q=1$, 那么等式左边成了 $\#L(m,n)$, 而等式右边等于 $\binom{m+n}{m}$, 这与命题 6.3 一致.

读者现在可能会猜测到, 偏序集 $L(m,n)$ 同构于一个商偏序集 B_s/G (其中 $s>0$ 是合适的整数, 有限群 G 作用在 B_s 上). 事实上, 因为 $L(m,n)$ 的秩为 mn, 而一般情形下 B_s/G 的秩为 s, 显然必有 $s=mn$. 而对 G 的适当选择就不那么明确了. 为此, 用 $R=R_{mn}$ 表示由方格构成的一个 $m\times n$ 形的矩形. 例如, R_{35} 是如下这 15 个方格组成的图:



现在如下定义群 $G=G_{mn}$. 它首先是 R 中正方形的所有置换构成的群 $\mathfrak{S}_R$ 的一个子群. G 中的置换 π 只允许对 R 的行内元素进行任意置换, 然后整行与整行之间可以任意置换. 每一行的元素有 $n!$ 种置换方式, 因此对 m 行共有 $n!^m$ 种保持行不动的置换方式. 然后 $m!$ 种方法对 m 个行进行置换, 于是 G_{mn} 的阶为 $m!n!^m$. 称群 G_{mn} 为 $\mathfrak{S}_n$ 和 $\mathfrak{S}_m$ 的圈积 (wreath product), 记为 $\mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m$ 或 $\mathfrak{S}_n$ wr $\mathfrak{S}_m$. 然而, 我们这里将不讨论圈积的一般理论.

6.7 例 假设 $m=4$ 和 $n=5$, R 中的方格标记如下:

1	2	3	4	5
6	7	8	9	10
11	12	13	14	15
16	17	18	19	20

则 $G(4,5)$ 中的一个典型置换 π 为:

16	20	17	19	18
4	1	5	2	3
12	13	15	14	11
7	9	6	10	8

即 $\pi(16)=1$, $\pi(20)=2$ 等.

我们刚刚定义了对集合 $R=R_{mn}$ 的置换所成的群 G_{mn}, 其中 R_{mn} 的元素是 $m\times n$ 矩形的所有方格. 因此 G_{mn} 作用在由集合 R 的全部子集构成的布尔代数 B_R 上. 下一个引理描述了这种作用的轨道.

6.8 引理 对 B_R 的作用 G_{mn} 的每一条轨道 $\mathfrak{o}$ 恰包含一个杨图, 即恰有一个子集 $D\subseteq R$ 使得 D 是左对齐的, 并且如果 λ_i 是 D 在 R 中第 i 行的元素个数, 那么 $\lambda_1\geqslant\lambda_2\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m$.

证明 设 S 为 R 的一个子集, 并且假设 S 的第 i 行有 α_i 个元素. 若 $\pi\in G_{mn}$ 且 $\pi\cdot S$ 在第 i 行有 β_i 个元素, 则 $\beta_1,\ldots,\beta_m$ 正好是 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 的某一重排 [为什么]. 存在 $\alpha_1,\ldots,\alpha_m$ 的唯一排序 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$ 使得 $\lambda_1\geqslant\cdots\geqslant\lambda_m$, 因此在轨道 $\pi\cdot S$ 中唯一可能的杨图 D 的形状是 $\lambda=(\lambda_1,\ldots,\lambda_m)$. 容易看到形状为 λ 的杨图 D_λ 确实在轨道 $\pi\cdot S$ 中. 就是说, 因为通过置换 R 的行内元素可以使得 S 的行都左对齐, 然后通过 R 的行间置换可以将 S 的行按大小弱递减序排列. 因此我们可以得到题设中的杨图 D_λ. □

现在可以得到本章中的主要结论了.

6.9 定理 设 $R=R_{mn}$. 则商偏序集 B_R/G_{mn} 同构于 $L(m,n)$.

证明 由引理 6.8 知 B_R/G_{mn} 中的每一个元素仅包含唯一一个杨图 D_λ. 进一步地, 因为轨道是互不相交的, 两个不同的轨道不可能包含同一个杨图 D. 因此定义为 $\varphi(D_\lambda)=\lambda$ 的映射 $\varphi\colon B_R/G_{mn}\to L(m,n)$ 是双射 (单射且满射). 我们断言 φ 事实上是偏序集之间的同构映射. 我们需要证明如下结论: 如果 $\mathfrak{o}$ 和 $\mathfrak{o}^*$ 是 G_{mn} 的轨道 (即 B_R/G_{mn} 中的元素), D_λ 和 D_{λ^*} 分别为 $\mathfrak{o}$ 和 $\mathfrak{o}^*$ 中唯一的杨图, 那么存在 $D\in\mathfrak{o}$ 和 $D^*\in\mathfrak{o}^*$ 满足 $D\subseteq D^*$ 当且仅当在 $L(m,n)$ 中有 $\lambda\leqslant\lambda^*$.

上句话中 “当” 的部分显然, 因为若 $\lambda\leqslant\lambda^*$ 则 $D_\lambda\subseteq D_{\lambda^*}$. 于是假设存在 $D\in\mathfrak{o}$ 和 $D^*\in\mathfrak{o}^*$ 满足 $D\subseteq D^*$. 将 D 中行的长度按降序排列, 记为 $\lambda_1,\ldots,\lambda_m$, 对 D^* 也同样操作. 因为 D 的每一行都包含在 D^* 对应的行中, 所以对任意的 $1\leqslant j\leqslant m$, D^* 中至少有 j 行的

大小不小于 λ_j. 因此, D^* 中第 j 大的行, 其长度 λ_j^* 不小于 λ_j. 换句话说, $\lambda_j \leqslant \lambda_j^*$, 这即为我们所要证明的. □

结合以上定理和定理 5.8 就得到了下面这个结论.

6.10 推论　偏序集 $L(m,n)$ 是秩对称和秩单峰的, 且具有 Sperner 性质.

注意到 $L(m,n)$ 的秩对称和秩单峰性可以重述为: q-二项式系数 $\binom{m+n}{m}$ 具有对称和单峰的系数. 秩对称性很容易证明 (见命题 6.2), 然而 $\binom{m+n}{m}$ 的系数的单峰性并不显然. 它首先由 J. Sylvester 于 1878 年用类似于本书的方法证明, 只是该证明用的是二元形式的不变量理论来表述的. 很长一段时间内, 寻找 $\binom{m+n}{m}$ 的系数的单峰性的组合证明一直是个公开问题. 这样的证明需要给出对 $i < \frac{1}{2}mn$ 时的一个确切单射 (一对一函数) $\mu\colon L(m,n)_i \to L(m,n)_{i+1}$. (寻找这种映射 μ 的一个难点在于利用 $i < \frac{1}{2}mn$ 的假设.) 最后在 1989 年左右, K. M. O'Hara 找到了这样的一个证明. 然而, O'Hara 的证明有一个缺陷就是她找到的映射 μ 不是序匹配的. 因此她的证明不能证明 $L(m,n)$ 具有 Sperner 性质, 而仅能证明秩单峰性. 对 $i < \frac{1}{2}mn$, 寻找一个确切的序匹配 $\mu\colon L(m,n)_i \to L(m,n)_{i+1}$ 是代数组合学中一个著名的公开问题.

注意到 $L(m,n)$ 的 Sperner 性质 (和最大水平是位于正中间这一事实) 能够用以下这种简单的方式来表述: 考虑容纳于一个 $m \times n$ 矩形中的杨图的集合 $\mathcal{C}$, 要求 $\mathcal{C}$ 中任意图都不被其他图包含. 拥有最多元素的这种集合 $\mathcal{C}$ 可取为由所有大小为 $\lfloor \frac{1}{2}mn \rfloor$ 的杨图构成的集合. 虽然这样的表述几乎不需要任何数学知识来理解, 但是却没有不借助代数工具的证明. 已知的几种代数证明都非常相关, 我们这里给出的是其中最简单的一种. 推论 6.10 是代数组合学高效率的一个很好例子.

数论中的一个应用　推论 6.10 在数论问题中有一个有趣的应用. 固定正整数 k. 对 $\mathbb{R}^+ = \{\beta \in \mathbb{R}\colon \beta > 0\}$ 中的一个有限子集 S 和一个实数 $\alpha > 0$, 定义

$$f_k(S,\alpha) = \#\left\{T \in \binom{S}{k}\colon \sum_{t\in T} t = \alpha\right\}.$$

换句话说, $f_k(S,\alpha)$ 是元素和等于 α 的 S 中 k 元子集的数目. 例如, 因为 $1+3+7 = 1+4+6 = 11$, 所以 $f_3(\{1,3,4,6,7\},11) = 2$.

对给定的正整数 $k < n$, 我们的目标是在 $\#S = n$ 的条件下最大化 $f_k(S,\alpha)$. 我们能够自由选择 S 和 α, 但 k 和 n 是固定的. 称这个最大值为 $h_k(n)$. 因此

$$h_k(n) = \max_{\substack{\alpha\in\mathbb{R}^+\\ S\subset\mathbb{R}^+\\ \#S=n}} f_k(S,\alpha).$$

对这个最大化的集合 S, 我们能期待它有什么性质呢? 若 S 的元素都是 "分散的", 比如 $S=\{1,2,4,8,\ldots,2^{n-1}\}$, 则 S 的不同子集的元素和都不同. 因此对任意的 $\alpha\in\mathbb{R}^+$, 有 $f_k(S,\alpha)=0$ 或 1. 类似地, 若 S 的元素是 "不相关的"(比如, 在有理数域线性无关, 如 $S=\{1,\sqrt{2},\sqrt{3},\pi,\pi^2\}$ 这样的例子), 则同样有不同子集的元素和都不同, 并且 $f_k(S,\alpha)=0$ 或 1. 由以上考虑, 我们似乎有理由取 $S=[n]=\{1,2,\ldots,n\}$, 然后再选取一个合适的 α. 换句话说, 这就导致我们有这么一个猜想: 对任意的 $S\in\binom{\mathbb{R}^+}{n}$ 和 $\alpha\in\mathbb{R}^+$, 有

$$f_k(S,\alpha)\leqslant f_k([n],\beta), \tag{6.6}$$

其中 $\beta\in\mathbb{R}^+$ 待定.

首先对任意的 α 计算 $f_k([n],\alpha)$. 这将使我们可以决定 (6.6) 中 β 的值. 设

$$S=\{i_1,\ldots,i_k\}\subseteq[n],$$

且

$$1\leqslant i_1<i_2<\cdots<i_k\leqslant n,\quad i_1+\cdots+i_k=\alpha. \tag{6.7}$$

令 $j_r=i_r-r$. 则 (因为 $1+2+\cdots+k=\binom{k+1}{2}$)

$$n-k\geqslant j_k\geqslant j_{k-1}\geqslant\cdots\geqslant j_1\geqslant 0,\quad j_1+\cdots+j_k=\alpha-\binom{k+1}{2}. \tag{6.8}$$

反过来, 对满足 (6.8) 的给定的 $j_1,\ldots,j_k$, 能够还原满足 (6.7) 的 $i_1,\ldots,i_k$. 因此 $f_k([n],\alpha)$ 等于满足 (6.8) 的序列 $j_1,\ldots,j_k$ 的数目. 现在设

$$\lambda(S)=(j_k,j_{k-1},\ldots,j_1).$$

注意到 $\lambda(S)$ 是整数 $\alpha-\binom{k+1}{2}$ 的一个分拆, 它最多有 k 个分量且最大分量不大于 $n-k$. 因此

$$f_k([n],\alpha)=p_{\alpha-\binom{k+1}{2}}(k,n-k), \tag{6.9}$$

或等价地,

$$\sum_{\alpha\geqslant\binom{k+1}{2}} f_k([n],\alpha)q^{\alpha-\binom{k+1}{2}}=\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}.$$

由 $L(n-k,k)$ 的秩单峰性 (和秩对称性)(推论 6.10), $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ 的最大系数是位于正中间的一个, 即第 $\lfloor k(n-k)/2\rfloor$ 项前的系数. 由此可得, 对固定的 k 和 n, 当 $\alpha=\lfloor k(n-k)/2\rfloor+\binom{k+1}{2}=\lfloor k(n+1)/2\rfloor$ 时 $f_k([n],\alpha)$ 取到最大值. 因此下面这个结论看起来是合理的.

6.11 定理 设 $S\in\binom{\mathbb{R}^+}{n}$, $\alpha\in\mathbb{R}^+$ 且 $k\in\mathbb{P}$. 则

$$f_k(S,\alpha)\leqslant f_k([n],\lfloor k(n+1)/2\rfloor).$$

证明 设 $S=\{a_1,\ldots,a_n\}$ 且 $0<a_1<\cdots<a_n$. 设 T 和 U 为 S 中两个不同的 k 元子集, 而子集的元素和相等, 比如 $T=\{a_{i_1},\ldots,a_{i_k}\}$ 和 $U=\{a_{j_1},\ldots,a_{j_k}\}$, 其中 $i_1<i_2<\cdots<i_k$ 和 $j_1<j_2<\cdots<j_k$. 定义 $T^*=\{i_1,\ldots,i_k\}$ 和 $U^*=\{j_1,\ldots,j_k\}$, 于是 $T^*,U^*\in\binom{[n]}{k}$. 重要的发现是如下这个结论:

断言 元素 $\lambda(T^*)$ 和 $\lambda(U^*)$ 在 $L(k,n-k)$ 中是不可比的, 即既没有 $\lambda(T^*)\leqslant\lambda(U^*)$ 也没有 $\lambda(U^*)\leqslant\lambda(T^*)$.

断言的证明 反证法, 不妨设 $\lambda(T^*)\leqslant\lambda(U^*)$. 因此由 $L(k,n-k)$ 的定义知, 对 $1\leqslant r\leqslant k$ 有 $i_r-r\leqslant j_r-r$. 因此对 $1\leqslant r\leqslant k$ 有 $i_r\leqslant j_r$, 于是 $a_{i_r}\leqslant a_{j_r}$ (因为 $a_1<\cdots<a_n$). 但是由假设知 $a_{i_1}+\cdots+a_{i_k}=a_{j_1}+\cdots+a_{j_k}$, 因此对所有的 r 有 $a_{i_r}=a_{j_r}$. 这与 "T 和 U 是不同的" 相矛盾, 断言得证.

现在完成定理 6.11 的证明就容易了. 假设 $S_1,\ldots,S_r$ 为 S 中不同的 k 元子集, 且它们都具有相同的元素和. 由断言知, $\{\lambda(S_1^*),\ldots,\lambda(S_r^*)\}$ 是 $L(k,n-k)$ 中的一条反链. 因此 r 不能超过 $L(k,n-k)$ 中最大反链的大小. 根据定理 6.6 和推论 6.10, $L(k,n-k)$ 中最大反链的大小为 $p_{\lfloor k(n-k)/2\rfloor}(k,n-k)$. 由等式 (6.9) 知这个值等于 $f_k([n],\lfloor k(n+1)/2\rfloor)$. 换句话说,

$$r\leqslant f_k\big([n],\lfloor k(n+1)/2\rfloor\big),$$

即为我们想证明的结论. □

注意到定理 6.11 也可等价地叙述为: $h_k(n)$ 等于 $\binom{\boldsymbol{n}}{\boldsymbol{k}}$ 中 $q^{\lfloor k(n-k)/2\rfloor}$ 的系数 [为什么].

这一主题的变形 假设在定理 6.11 中我们并不希望指定 S 的子集的元素个数. 换句话说, 对任意的 $\alpha\in\mathbb{R}$ 和任意的有限子集 $S\subset\mathbb{R}^+$, 定义

$$f(S,\alpha)=\#\{T\subseteq S:\sum_{t\in T}t=\alpha\}.$$

若要求 $\#S=n$, $f(S,\alpha)$ 的最大值是多少? 称这个最大值为 $h(n)$. 因此

$$h(n)=\max_{\substack{\alpha\in\mathbb{R}^+\\ S\subset\mathbb{R}^+\\ \#S=n}}f(S,\alpha). \tag{6.10}$$

例如, 若 $S=\{1,2,3\}$ 则 $f(S,3)=2$ (来自于子集 $\{1,2\}$ 和 $\{3\}$). 容易看到这是最好的可能, 即 $h(3)=2$.

我们将用类似证明定理 6.11 的方法来得到 $h(n)$. 这其中最大的不同在于相关的偏序集 $M(n)$ 不是 (not) 形如 B_n/G 的偏序集, 于是必须要从头开始证明序提升算子 U_i 的单射性. 我们的证明将有些粗略, 但对到了现在这种程度的读者而言, 补充好细节应该不会太难.

设 $M(n)$ 为 $[n]$ 的所有子集组成的集合, 定义集合上的序 $A \leqslant B$ 为: 若 A 中元素是 $a_1 > a_2 > \cdots > a_j$, B 中元素是 $b_1 > b_2 > \cdots > b_k$, 满足 $j \leqslant k$ 且对 $1 \leqslant i \leqslant j$ 有 $a_i \leqslant b_i$. (空集 $\emptyset$ 是 $M(n)$ 中最底部的元素.) 图 6.3 展示了 $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$ 和 $M(4)$.

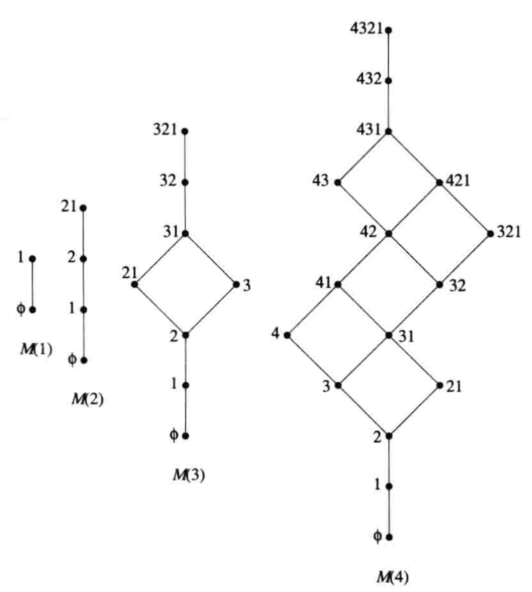


图 6.3　偏序集 $M(1)$, $M(2)$, $M(3)$ 和 $M(4)$

易知 $M(n)$ 是秩为 $\binom{n+1}{2}$ 的分次偏序集. 子集 $T = \{a_1, \ldots, a_k\}$ 的秩为

$$\operatorname{rank}(T) = a_1 + \cdots + a_k. \tag{6.11}$$

因此 [为什么], $M(n)$ 的秩生成函数为

$$F(M(n), q) = \sum_{i=0}^{\binom{n+1}{2}} (\#M(n)_i) q^i = (1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n).$$

定义线性变换

$$U_i \colon \mathbb{R}M(n)_i \to \mathbb{R}M(n)_{i+1}, \quad D_i \colon \mathbb{R}M(n)_i \to \mathbb{R}M(n)_{i-1}$$

为

$$U_i(x) = \sum_{\substack{y \in M(n)_{i+1} \\ x < y}} y, \quad x \in M(n)_i,$$

$$D_i(x) = \sum_{\substack{v \in M(n)_{i-1} \\ v < x}} c(v,x)v,\ x \in M(n)_i,$$

其中的系数 $c(v,x)$ 按如下定义. 设 v 的元素为 $a_1 > \cdots > a_j > 0$, x 的元素为 $b_1 > \cdots > b_k > 0$. 因为 x 覆盖 v, 所以存在唯一的 r 使得 $a_r = b_r - 1$ (并且对所有其他的 k 有 $a_k = b_k$). 当 $b_r = 1$ 时, 令 $a_r = 0$. (例如, 若 x 为 $5 > 4 > 1$, v 为 $5 > 4$, 则 $r = 3$ 且 $a_3 = 0$.) 令

$$c(v,x) = \begin{cases} \binom{n+1}{2}, & \text{若 } a_r = 0, \\ (n-a_r)(n+a_r+1), & \text{若 } a_r > 0. \end{cases}$$

直接计算 (证明省略) 可得如下的交换关系:

$$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = \left(\binom{n+1}{2} - 2i\right) I_i, \tag{6.12}$$

其中 I_i 表示 $\mathbb{R}M(n)_i$ 上的恒等线性变换. 由定义, 清楚地看到 U_i 是序提升算子. 我们想要证明的是当 $i < \frac{1}{2}\binom{n+1}{2}$ 时 U_i 是个单射 (一对一的). 因为 U_{i-1} 不再是 D_i 的转置, 所以不能像引理 4.6 的证明中那样, 讨论 $U_{i-1}D_i$ 的半正定性. 作为替代, 我们可以利用如下这个线性代数中的结论.

6.12 引理　设 V 和 W 为域上的有限维向量空间. $A\colon V \to W$ 和 $B\colon W \to V$ 为线性变换. 则

$$x^{\dim V} \det(AB - xI) = x^{\dim W} \det(BA - xI).$$

换句话说, AB 和 BA 有相同的非零特征值.

现在就能证明如下这个关键的线性代数结论.

6.13 引理　线性变换 U_i 在 $i < \frac{1}{2}\binom{n+1}{2}$ 时是单射, 在 $i \geqslant \frac{1}{2}\binom{n+1}{2}$ 时是满射.

证明　当 $i < \frac{1}{2}\binom{n+1}{2}$ 时, 通过对 i 归纳来证明 $D_{i+1}U_i$ 仅有正实数特征值. 因为 $\dim \mathbb{R}M(n)_0 = 1$, $i = 0$ 的情形容易验证. 归纳假设对某一 $i < \frac{1}{2}\binom{n+1}{2} - 1$ 命题成立, 即假设 D_iU_{i-1} 仅有正实数特征值. 根据引理 6.12, $U_{i-1}D_i$ 仅有非负特征值. 由 (6.12) 有,

$$D_{i+1}U_i = U_{i-1}D_i + \left(\binom{n+1}{2} - 2i\right) I_i.$$

因此 $D_{i+1}U_i$ 的特征值是 $U_{i-1}D_i$ 的特征值加上 $\binom{n+1}{2} - 2i$. 因为 $\binom{n+1}{2} - 2i > 0$, 所以 $D_{i+1}U_i$ 仅有正实数特征值. 由此可知 $D_{i+1}U_i$ 是可逆的, 于是 U_i 是单射. 类似地 (或由 "对称性"), 当 $i \geqslant \frac{1}{2}\binom{n+1}{2}$ 时 U_i 是满射. □

现在由一个大家熟悉的讨论可得偏序集 $M(n)$ 上的主要结论.

6.14 定理 偏序集 $M(n)$ 是秩为 $\binom{n+1}{2}$ 的分次偏序集, 且是秩对称、秩单峰和具有 Sperner 性质的.

证明 我们已经看到 $M(n)$ 是秩为 $\binom{n+1}{2}$ 的分次偏序集和秩对称的. 由引理 6.13, 当 $i < \frac{1}{2}\binom{n+1}{2}$ 时 U_i 是单射, 当 $i \geqslant \frac{1}{2}\binom{n+1}{2}$ 时 U_i 是满射. 再根据命题 4.4 和引理 4.5, 定理得证. □

注 作为定理 6.14 的结果, 多项式 $F(M(n),q) = (1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)$ 具有单峰的系数. 与 $L(m,n)$ 的情况不同 (我们在上文提到了 O'Hara 的证明), 这一结果没有已知的组合证明.

现在, 通过类似于定理 6.11 证明中那样的讨论, 我们就能确定 $h(n)$ (如等式 (6.10) 定义).

6.15 定理 设 $S \in \binom{\mathbb{R}^+}{n}$ 和 $\alpha \in \mathbb{R}^+$. 则

$$f(S,\alpha) \leqslant f\left([n], \left\lfloor \frac{1}{2}\binom{n+1}{2} \right\rfloor\right) = h(n).$$

证明 设 $S = \{a_1, \ldots, a_n\}$, 且 $0 < a_1 < \cdots < a_n$. 设 T 和 U 是 S 的具有相同元素和的不同子集, 比如 $T = \{a_{r_1}, \ldots, a_{r_j}\}$ 和 $U = \{a_{s_1}, \ldots, a_{s_k}\}$, 且 $r_1 < r_2 < \cdots < r_j$ 和 $s_1 < s_2 < \cdots < s_k$. 定义 $T^* = \{r_1, \ldots, r_j\}$ 以及 $U^* = \{s_1, \ldots, s_k\}$, 于是 $T^*, U^* \in M(n)$. 以下这个事实可以通过与 $L(m,n)$ 相关的一个类似的事实 (定理 6.11 证明中的断言) 相同的证明方法来得到, 这里省略.

事实 元素 T^* 和 U^* 在 $M(n)$ 中是不可比的, 即既没有 $T^* \leqslant U^*$ 也没有 $U^* \leqslant T^*$.

现在可以容易地完成定理 6.15 的证明. 假设 $S_1, \ldots, S_t$ 是 S 的具有相同的元素和的不同子集. 由以上事实知, $\{S_1^*, \ldots, S_t^*\}$ 是 $M(n)$ 中的一个反链. 因此 t 不能超过 $M(n)$ 中最大反链的大小. 由定理 6.14, $M(n)$ 中最大反链的大小为中间秩的大小 $p_{\lfloor \frac{1}{2}\binom{n+1}{2} \rfloor}$. 由等式 (6.11), 该数等于 $f([n], \lfloor \frac{1}{2}\binom{n+1}{2} \rfloor)$. 换句话说,

$$t \leqslant f\left([n], \left\lfloor \frac{1}{2}\binom{n+1}{2} \right\rfloor\right),$$

这就是我们所希望证明的结论. □

注 定理 6.15 被称为弱 Erdős-Moser 猜想. 最初的 (强) Erdős-Moser 猜想处理的是 $S \subset \mathbb{R}$ 的情形, 而非 $S \subset \mathbb{R}^+$. 这两种情形有些不同, 比如 $h(3) = 2$ (对应于 $S = \{1,2,3\}$ 和 $\alpha = 3$), 而集合 $\{-1,0,1\}$ 有四个 (four) 子集的元素和等于 0 (包括空集). (若允许 $S \subset \mathbb{R}$, 读者能看出定理 6.15 的证明在哪里行不通吗?) 最初的 Erdős-Moser 猜想断言, 若 $\#S = 2m+1$,

则

$$f(S,\alpha) \leqslant f\big(\{-m,-m+1,\ldots,m\},0\big). \tag{6.13}$$

将刚刚给出的弱猜想情形的证明做一个技巧性的修改, 就可证明以上这个结果, 见练习 6.5. 除了这里指出的证明 (有时以一种更复杂的形式出现, 这将在下一个注意中解释), 对 (弱和强) Erdős-Moser 猜想没有别的证明.

注 定理 6.15 证明的关键在于满足交换关系 (6.12) 的 U_i 和 D_i 的定义. 读者可能想知道这些定义是怎么被发现的 (尤其是对 D_i). 事实上, 定理 6.15 最初的证明是基于正交李代数 $\mathfrak{o}(2n+1,\mathbb{C})$ 的表示论. 本文中, U_i 和 D_i 的定义是建立在 $\mathfrak{o}(2n+1,\mathbb{C})$ 的"主子代数"的理论上的. R. A. Proctor 是第一个将表示论从证明中移除, 并且将证明仅用线性代数呈现的人.

第 6 章注记

介绍分拆理论本科水平的文献见 Andrews and Eriksson [3]. 更专业一点的文献见 Andrews [2], 而简短的介绍见 [107, §1.8].

文中已经提到, $L(m,n)$ 的秩单峰性, 即 q-二项式系数 $\binom{m+n}{m}$ 的系数的单峰性, 由 J. J. Sylvester [112] 给出, 后来的组合证明由 K. M. O'Hara [81] 给出. 对 O'Hara 的工作的详细说明见 D. Zeilberger [123].

多项式 $(1+q)(1+q^2)\cdots(1+q^n)$ 的系数的单峰性隐含在 E. B. Dynkin 的工作 [30][31, p. 332] 中. J. W. B. Hughes 首次确切地发现这个多项式产生于 Dynkin 的工作的一个特例. $L(m,n)$ 和 $M(n)$ 的 Sperner 性质, 以及 Erdős-Moser 猜想的证明, 首先由 Stanley [101] 给出. 在文中已经提到的 R. A. Proctor [88], 是第一个将表示论移除, 并将证明仅用线性代数呈现的人.

引理 6.12 的两个证明, 见 W. V. Parker [82] 和 J. Schmid [98].

第 6 章练习

1. (a) 用 $\boldsymbol{A}(m,n)$ 表示 $L(m,n)$ 的 Hasse 图的邻接矩阵 (定义在 $\mathbb{R}$ 上). 证明: 若 $\boldsymbol{A}(m,n)$ 是非奇异的, 则 $\binom{m+n}{m}$ 是偶数.

   (b) (未解决) 对怎样的 m 和 n, $\boldsymbol{A}(m,n)$ 是非奇异的? 当 $m \leqslant n$ 且 $m+n \leqslant 13$ 时, 这样的 (m,n) 对为 $(1,1)$, $(1,3)$, $(1,5)$, $(3,3)$, $(1,7)$, $(1,9)$, $(3,7)$, $(5,5)$, $(1,11)$, $(3,9)$, $(5,7)$.

(c) (非常困难) 证明: 矩阵 $\boldsymbol{A}(m,n)$ 的特征多项式 (在 $\mathbb{Q}$ 上) 的每一个不可约因子的次数至多为 $\frac{1}{2}\varphi(2(m+n+1))$, 其中 φ 是 Euler phi-函数 (定义见例 7.9).

2. (a) (比较困难) 证明: 在 $L(m,n)$ 中覆盖关系的数目 $c(m,n)$, 即 $L(m,n)$ 中满足 μ 覆盖 λ 的分拆对 (λ,μ) 的个数, 由下式给出:

$$c(m,n)=\frac{(m+n-1)!}{(m-1)!\,(n-1)!}.$$

(b) (相当困难) (*) 证明 $L(m,n)$ 中满足 $\lambda\leqslant\mu$ 的分拆对 (λ,μ) 的个数 $d(m,n)$ 为

$$d(m,n)=\frac{(m+n)!\,(m+n+1)!}{m!\,(m+1)!\,n!\,(n+1)!}.$$

3. (困难) (*) 注意到 $L(m,n)$ 为杨格 Y 中满足 $\lambda\leqslant\langle n^m\rangle$ 的所有分拆 λ 的集合, 其中 $\langle n^m\rangle$ 为 m 个分量都等于 n 的分拆. 用 Y_μ 表示满足 $\lambda\leqslant\mu$ 的所有分拆的集合. 问 Y_μ 是否总是秩单峰的?

4. (a) 当 $i<n$ 时, 找寻一个确切的序匹配 μ: $L(2,n)_i\to L(2,n)_{i+1}$.
   (b) (更困难) 当 $i<3n/2$ 时, 对 $L(3,n)_i\to L(3,n)_{i+1}$ 进行同样的操作.
   (c) (尤为困难) 当 $i<2n$ 时, 对 $L(4,n)_i\to L(4,n)_{i+1}$ 进行同样的操作.
   (d) (未解决) 当 $i<5n/2$ 时, 对 $L(5,n)_i\to L(5,n)_{i+1}$ 进行同样的操作.

5. 假设 $M(j)\times M(k)^*$ 是秩对称、秩单峰以及具有 Sperner 性质的. 这里 $M(k)^*$ 表示 $M(k)$ 的对偶, 即在 $M(k)^*$ 中 $x\leqslant y$ 当且仅当在 $M(k)$ 中有 $y\leqslant x$. (实际上 $M(k)\cong M(k)^*$, 但这里并不需要这个性质.) 推导由 (6.13) 给出的最初的 Erdős-Moser 猜想, 即若 $S\subset\mathbb{R}$ 和 $\#S=2m+1$, 则

$$f(S,\alpha)\leqslant f\big(\{-m,-m+1,\ldots,m\},0\big).$$

注　若 P 和 Q 是偏序集, 则直积 (direct product) $P\times Q$ 是集合 $\{(x,y):x\in P,\ y\in Q\}$ 上的一个偏序集, 其序关系定义为 $(x,y)\leqslant(x',y')$ 当且仅当在 P 中 $x\leqslant x'$ 且在 Q 中 $y\leqslant y'$.

6. (未解决) 证明 $L(m,n)$ 有对称链分解. 已知 $m\leqslant 4$ 时结论成立.

第 7 章　群作用下的计数

在第 5 和第 6 章中我们考虑了商偏序集 B_n/G, 其中 G 是对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的一个子群. 若 p_i 表示这一偏序集中秩为 i 的元素个数, 则序列 $p_0, p_1, \ldots, p_n$ 是秩对称和秩单峰的. 因此读者很自然地会问, 是否存在计算 p_i 的巧妙公式. 例如, 在定理 5.9 中, p_i 等于有 m 个顶点 (其中 $n = \binom{m}{2}$) 和 i 条边的非同构图的个数, 是否有巧妙的公式来得到这个数? 对定理 6.6 中的群 $G_{mn} = \mathfrak{S}_n \wr \mathfrak{S}_m$, 我们得到了 p_i 的一个简单生成函数 (即一个计算秩生成函数 $F(B_{mn}/G_{mn}, q) = \sum_i p_i q^i$ 的公式), 但这只是一个非常特殊的情形. 本章中我们将展现一个一般性的理论, 来计算对称群作用下的不等价对象的个数, 这将包括一个秩生成函数 $F(B_n/G, q)$ 的公式. 这一理论的主要创建者是 G. Pólya (虽然其中的一大部分可以在 J. H. Redfield 的工作中预见), 因此常被称为 *Pólya 计数理论* (Pólya theory of enumeration) 或 *Pólya 理论* (Pólya theory). 若要了解更多的历史资料, 见本章末的参考文献.

通过对某一几何或组合对象的 "着色" 入手, 可以很容易地理解 Pólya 理论. 例如, 考虑如下的一行五个方块:

有多少种方法对这些方块用 n 种颜色进行着色? 每一个方块可以着 n 种颜色中的任意一种, 故共有 n^5 种方法. 这些着色能标记为

A	B	C	D	E

其中 A, B, C, D, E 表示五种颜色. 现在假设允许对这一行五个方块旋转 180°, 若通过这样的旋转, 一种着色能变到另一种, 则将这两种着色视为相同的. (我们可以想象将这一行五个方块从纸面上剪下, 并对它们的一面着色.) 若两种着色相同或通过旋转 180° 能从一种着色得到另一种, 则称这两种着色是*等价的* (equivalent). 首先我们可以天真地假设每种着色恰好等价于唯一的另一种着色 (除去它本身), 这样不等价着色的个数就是 $n^5/2$. 显然这一推断不正确, 因为 $n^5/2$ 不总是整数! 当然问题是出在有些着色旋转 180° 后仍然保持原样. 事实上, 这样的情形仅仅出现在如下形式的着色中

A	B	C	B	A

其中 A, B, C 为任意的三种颜色. 有 n^3 个这种类型的着色, 因此不等价着色的总数为

$$\frac{1}{2}(\text{旋转 } 180^\circ \text{ 后不等于它本身的着色数})$$

$$+(\text{旋转 } 180^\circ \text{ 后等于它本身的着色数})$$

$$= \frac{1}{2}(n^5 - n^3) + n^3$$
$$= \frac{1}{2}(n^5 + n^3).$$

Pólya 理论给出了一个系统方法, 可以得到在任意的对称性群作用下的这种着色数的公式.

下面进行一般性的设定. 设 X 为一个有限集合, G 为对称群 $\mathfrak{S}_X$ 的子群. 将 G 视为由 X 上的对称性构成的群. 设 C 为另一个集合 (可能为无限集), 将其视为 "颜色" 的集合. 对 X 的一个着色 (coloring) 是一个函数 $f\colon X \to C$. 例如, X 是 2×2 棋盘的四方块所构成的集合, 标记如下:

1	2
3	4

设 $C = \{r, b, y\}$ (红色、蓝色和黄色). 对 X 的一个典型着色如下

r	b
y	r

因此上表表明函数 $f\colon X \to C$ 为 $f(1) = r, f(2) = b, f(3) = y, f(4) = r$.

注　作用在集合 X 上的群 G 可以更具有一般性, 即给出的同态 $\varphi\colon G \to \mathfrak{S}_X$ 可以不是单射. 然而, 我们会有一个定义良好的导出单同态 $\psi\colon H \to \mathfrak{S}_X$, 其中 $H = G/(\ker \varphi)$. 对 H 所得到的结论与对 G 所得到的结论可以等同, 因此假设 φ 是单射并没有任何的损失. 这种情形下, 能将 G 与它的象 $\varphi(G)$ 等同.

如果存在一个元素 $\pi \in G$ 使得两种着色 f 和 g 满足

$$\text{对所有的 } x \in X \text{ 有} g\big(\pi(x)\big) = f(x),$$

那么定义 f 和 g 是等价的 (equivalent) (当有必要指出确切的群时, 称为 G-等价的), 表示成 $f \sim g$ 或 $f \overset{G}{\sim} g$. 可以将上述条件简要地记为 $g\pi = f$, 其中 $g\pi$ 表示函数的复合 (从右至左). 利用 G 是一个群, 容易验证 $\sim$ 是一个等价关系. 读者可以将等价函数视为 "在对称意义下" 相同.

7.1 例　如上文, 设 X 为 2×2 的棋盘和 $C = \{r, b, y\}$. 存在多种可能的对称性群 G, 而不同的群作用将影响两种着色是否等价. 例如, 考虑如下这些群:

- G_1 仅由恒等置换 $(1)(2)(3)(4)$ 组成.
- G_2 为垂直反射生成的群. 它包含元素 $(1)(2)(3)(4)$ (单位元) 和 $(1, 2)(3, 4)$ (垂直反射).

- G_3 为主对角线上的反射生成的群. 它包含元素 $(1)(2)(3)(4)$ (单位元) 和 $(1)(4)(2,3)$ (主对角线反射).
- G_4 为 X 上的所有旋转构成的群. 它是阶数为 4 的循环群, 其元素为 $(1)(2)(3)(4)$, $(1,2,4,3)$, $(1,4)(2,3)$ 和 $(1,3,4,2)$.
- G_5 是 X 上所有旋转和反射构成的二面体群. 它有 8 个元素, 即 G_4 中的 4 个元素, 以及 4 个反射 $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$, $(1)(4)(2,3)$ 和 $(2)(3)(1,4)$.
- G_6 是 X 上的所有 (all) 24 个置换构成的对称群. 虽然这是一个完美且有效的对称性群, 但它与 2×2 棋盘 X 上的几何表示不再有任何联系.

将 X 着色成两个红色方块, 一个蓝色方块和一个黄色方块, 考虑在如上六种情形下的不等价着色.

(G_1) 共有 12 种方法将 X 着色成两个红色方块, 一个蓝色方块和一个黄色方块, 并且在平凡群 (只有一个元素的群) 作用下所有的着色都不等价. 一般而言, 当 G 是平凡群时, 两种着色等价当且仅当它们是相同的 [为什么].

(G_2) 存在六种不等价着色, 可表示为

$$\begin{array}{|c|c|}\hline r & r \\ \hline b & y \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline r & b \\ \hline r & y \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline r & y \\ \hline r & b \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline b & y \\ \hline r & r \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline r & b \\ \hline y & r \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline r & y \\ \hline b & r \\ \hline\end{array}$$

每个等价类都包含两个元素.

(G_3) 存在 7 个不同等价类, 可表示为

$$\begin{array}{|c|c|}\hline r & r \\ \hline b & y \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline r & r \\ \hline y & b \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline b & y \\ \hline r & r \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline y & b \\ \hline r & r \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline r & b \\ \hline y & r \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline b & r \\ \hline r & y \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline y & r \\ \hline r & b \\ \hline\end{array}$$

前面的五个类都包含两个元素, 后两个类仅包含一个元素. 虽然 G_2 和 G_3 作为抽象群来说是同构的, 但作为置换群它们有着不同的结构. 具体来说, G_2 的生成元 $(1,2)(3,4)$ 有两个长度为 2 的轮换, 而生成元 $(1)(4)(2,3)$ 有两个长度为 1 的轮换和一个长度为 2 的轮换. 我们在下文中将会看到, G 中元素的轮换长度决定了各等价类的大小. 这就解释了为什么 G_2 和 G_3 的不同等价类的数目不同.

(G_4) 存在三个不同等价类, 每个类包含四个元素. 每个类的大小都等于群的阶数, 因为这些着色关于群都没有对称性, 即对任意的着色 f, 唯一能固定 f 的群元素 π (因此 $f\pi = f$) 是单位元 ($\pi = (1)(2)(3)(4)$).

$$\begin{array}{|c|c|}\hline r & r \\ \hline y & b \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline r & r \\ \hline b & y \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline r & b \\ \hline y & r \\ \hline\end{array}$$

(G_5) 在二面体群的作用下, 存在两个不同等价类.

$$\begin{array}{|c|c|}\hline r & r \\ \hline b & y \\ \hline\end{array}\quad \begin{array}{|c|c|}\hline r & b \\ \hline y & r \\ \hline\end{array}$$

第一个类包含八个元素, 而第二个类包含四个元素. 一般而言, 类的大小等于固定类中某一给定着色的子群在 G 中的指标 [为什么]. 例如, 固定以上第二种着色的子群为 $\{(1)(2)(3)(4),(1,4)(2)(3)\}$, 它在阶数为 8 的二面体群中的指标为 4.

(G_6) 在方块的所有置换构成的群 $\mathfrak{S}_4$ 的作用下, 显然仅存在一个等价类, 其包含了所有十二种着色. 一般情形, 对任意的集合 X, 若群是对称群 $\mathfrak{S}_X$, 则两种着色等价当且仅当每种颜色出现的次数相等 [为什么].

我们的一般目标就是计算每种颜色都规定使用次数的不等价着色数目. 可将这些信息放入一个生成函数 (generating function)——一个多项式, 其系数为我们所寻求的数. 例如, 考虑例 7.1 中的集合 X, 群 $G=G_5$ (二面体群), 颜色集合 $C=\{r,b,y\}$. 设 $\kappa(i,j,k)$ 为使用 i 次红色, j 次蓝色和 k 次黄色的不等价着色数目. 将颜色 r,b,y 视为变量 (variables), 并且构建如下的多项式

$$F_G(r,b,y)=\sum_{i+j+k=4}\kappa(i,j,k)r^ib^jy^k.$$

注意到因为对四元集合 X 着色, 一共需要用到四种颜色, 所以和式仅遍历满足 $i+j+k=4$ 的 i,j,k. 读者应该去验证

$$\begin{aligned}F_G(r,b,y)=&(r^4+b^4+y^4)+(r^3b+rb^3+r^3y+ry^3+b^3y+by^3)\\&+2(r^2b^2+r^2y^2+b^2y^2)+2(r^2by+rb^2y+rby^2).\end{aligned}$$

例如, r^2by 前的系数为 2, 是因为从上文知道, 使用颜色 r,r,b,y 有两种不等价着色. 注意到 $F_G(r,b,y)$ 是一个关于变量 r,b,y 的对称函数 (symmetric function)(即任意置换变元它都保持不变), 因为只要是对不等价着色计数, 每种颜色名字 (names) 的不同并不会造成什么差别. 作为特例可以问使用四种颜色的不等价着色的总数 (total) 是多少. 这可以通过在 $F_G(r,b,y)$ 中取 $r=b=y=1$ 来得到 [为什么], $F_G(1,1,1)=3+6+2\cdot3+2\cdot3=21$.

当使用 n 种颜色 $r_1,r_2,\ldots,r_n$ 时 (可以看做是不同色度的红色), 上面例子中的生成函数 F_G 是什么? 显然重要的只是颜色使用的次数, 而不考虑使用的顺序. 换句话说, 共有五种情形: (a) 所有四种颜色相同, (b) 一种颜色使用三次, 另一种颜色使用一次, (c) 两种颜色都使用两次, (d) 一种颜色使用两次, 另两种颜色均使用一次, (e) 四种颜色均使用一次. 这五种情形对应了 4 的五个分拆, 即不考虑顺序的情形下, 将 4 写为正整数和的五种方式: 4, $3+1$, $2+2$, $2+1+1$, $1+1+1+1$. 这时的生成函数为

$$\begin{aligned}F_G(r_1,r_2,\ldots,r_n)=&\sum_i r_i^4+\sum_{i\neq j}r_i^3r_j\\&+2\sum_{i<j}r_i^2r_j^2+2\sum_{\substack{i\neq j\\ i\neq k\\ j<k}}r_i^2r_jr_k+3\sum_{i<j<k<l}r_ir_jr_kr_l,\end{aligned}$$

其中每个和式的指标都取自 1 和 n 之间. 若取所有的变元都等于 1 (得到用 n 种颜色着色的总数), 则由简单的组合推理可得

$$\begin{aligned} F_G(1,1,\ldots,1) &= n + n(n-1) + 2\binom{n}{2} + 2n\binom{n-1}{2} + 3\binom{n}{4} \\ &= \frac{1}{8}(n^4 + 2n^3 + 3n^2 + 2n). \end{aligned} \tag{7.1}$$

注意到多项式 (7.1) 可以如下来描述: 分母 8 是群 G_5 的阶数, 分子中 n^i 前的系数正好是 G_5 中具有 i 个轮换的置换数目! 例如, n^2 前的系数是 3, 而 G_5 中由两个轮换构成的置换也有 3 个, 分别是 $(1,2)(3,4)$, $(1,3)(2,4)$ 和 $(1,4)(2,3)$. 我们希望证明这种本质的一般性结论.

我们将利用的一个基本工具是来自于置换群理论的一个被称为 Burnside 引理的简单结论. 事实上, 这一引理最早是由 Cauchy 给出了当 G 是传递 (即在如下的引理 7.2 中 $|Y/G|=1$) 情形下的证明, 而 Frobenius 证明了一般情形, 所以有时这一引理被称为 Cauchy-Frobenius 引理.

7.2 引理 (Burnside 引理) 设 Y 为一个有限集合, G 为 $\mathfrak{S}_Y$ 的一个子群. 对每一个 $\pi \in G$, 设

$$\mathrm{Fix}(\pi) = \{y \in Y : \pi(y) = y\},$$

因此 $\#\mathrm{Fix}(\pi)$ 等于置换 π 中长度为 1 的轮换数目. 设 Y/G 为 G 的轨道的集合. 则

$$|Y/G| = \frac{1}{\#G}\sum_{\pi\in G}\#\mathrm{Fix}(\pi).$$

Burnside 引理的一个等价形式是说, 被 G 中元素固定的 Y 中元素的平均个数等于 G 的轨道数. 开始证明之前, 我们先来考虑一个例子.

7.3 例 设 $Y = \{a,b,c,d\}$,

$$G = \{(a)(b)(c)(d), (a,b)(c,d), (a,c)(b,d), (a,d)(b,c)\},$$

和

$$G' = \{(a)(b)(c)(d), (a,b)(c)(d), (a)(b)(c,d), (a,b)(c,d)\}.$$

两个群都同构于 $\mathbb{Z}_2 \times \mathbb{Z}_2$ (对比例 5.1(c) 和 (d)). 由 Burnside 引理, G 的轨道数为 $\frac{1}{4}(4+0+0+0)=1$. 事实上, 给定任意的两个元素 $i,j \in Y$, 通过检验易知存在一个 $\pi \in G$ (恰好是唯一的), 使得 $\pi(i)=j$. 另一方面, G' 的轨道数为 $\frac{1}{4}(4+2+2+0)=2$. 实际上, 两个轨道为 $\{a,b\}$ 和 $\{c,d\}$.

Burnside 引理的证明　对 $y \in Y$ 设 $G_y = \{\pi \in G\colon \pi \cdot y = y\}$ (固定 y 的置换的集合). 则

$$\begin{aligned}\frac{1}{\#G}\sum_{\pi\in G}\#\mathrm{Fix}(\pi) &= \frac{1}{\#G}\sum_{\pi\in G}\sum_{\substack{y\in Y\\ \pi\cdot y=y}}1\\ &= \frac{1}{\#G}\sum_{y\in Y}\sum_{\substack{\pi\in G\\ \pi\cdot y=y}}1\\ &= \frac{1}{\#G}\sum_{y\in Y}\#G_y.\end{aligned}$$

(如同引理 5.6 的证明) 轨道 Gy 中的每个元素在由 $\pi \cdot y$ $(\pi \in G)$ 组成的重集中出现相同的次数, 即 $\#G/\#Gy$ 次. 因而 y 在 $\pi \cdot y$ 中出现 $\#G/\#Gy$ 次, 于是

$$\frac{\#G}{\#Gy} = \#G_y.$$

因此有

$$\begin{aligned}\frac{1}{\#G}\sum_{\pi\in G}\#\mathrm{Fix}(\pi) &= \frac{1}{\#G}\sum_{y\in Y}\frac{\#G}{\#Gy}\\ &= \sum_{y\in Y}\frac{1}{\#Gy}.\end{aligned}$$

在以上的和式中, $1/\#\mathcal{O}$ 会出现多少次, 其中 $\mathcal{O}$ 为一个固定的轨道? 我们问的就是有多少个 y 会使得 $Gy = \mathcal{O}$. 而 $Gy = \mathcal{O}$ 当且仅当 $y \in \mathcal{O}$, 所以 $1/\#\mathcal{O}$ 出现了 $\#\mathcal{O}$ 次. 因此每个轨道计数仅一次, 所以以上和式等于轨道的数目. □

7.4 例　用 n 种颜色对正六边形 H 的顶点进行着色, 在循环对称的作用下[①]有多少种不等价着色? 设 $\mathcal{C}_n$ 为 H 的所有 n-着色的集合. 设 G 为 $\mathcal{C}_n$ 上循环置换颜色的所有置换构成的群, 因此 $G \cong \mathbb{Z}_6$. 我们问的就是 G 的轨道数 [为什么]. 为了应用 Burnside 引理, 需要对 G 中六个元素 σ 一一计算被其固定的着色数. 设 π 为 G 的生成元.

- $\sigma = 1$ (单位元): 所有 n^6 种着色都被 σ 固定.
- $\sigma = \pi, \pi^{-1}$: 仅有 n 种所有颜色都相同的着色被固定.
- $\sigma = \pi^2, \pi^4$: 任意形如 $ababab$ 的着色都被固定 (开始于任意固定的顶点, 按照环绕六边形的顺序, 线性地写出出现的颜色). 对 a 有 n 种选择, 对 b 也有 n 种选择, 因此共有 n^2 种着色.
- $\sigma = \pi^3$: 被固定的着色形如 $abcabc$, 因此共有 n^3 种.

① 这里指的是对正六边形旋转, 接下来的对染色的循环置换也是指旋转所引导的顶点着色的置换. ——译者注

于是由 Burnside 引理, 有

$$\text{轨道数} = \frac{1}{6}(n^6 + n^3 + 2n^2 + 2n).$$

明白了刚才例子的读者会很容易理解下面这个结论.

7.5 定理　设 G 为有限集合 X 上的置换群. 则对 X 的 (关于 G) 不等价 n-着色数 $N_G(n)$ 为

$$N_G(n) = \frac{1}{\#G} \sum_{\pi \in G} n^{c(\pi)}, \tag{7.2}$$

其中 $c(\pi)$ 表示 π 的轮换数.

证明　用 π_n 表示 $\pi \in G$ 对 X 上的 n-着色集合 $\mathcal{C}_n$ 的作用. 我们希望确定集合 $\mathrm{Fix}(\pi_n)$, 以应用 Burnside 引理. 设 C 表示 n 种颜色的集合. 若 $f\colon X \to C$ 是一个被 π 固定的着色, 则对所有的 $x \in X$ 有

$$f(x) = \pi_n \cdot f(x) = f\big(\pi(x)\big).$$

因此 $f \in \mathrm{Fix}(\pi_n)$ 当且仅当 $f(x) = f(\pi(x))$. 由此可得对任意的 $k \geqslant 1$, $f(x) = f(\pi^k(x))$ [为什么]. 对 $k \geqslant 1$, X 中形如 $\pi^k(x)$ 的元素 y 正好就是 π 中包含 x 的轮换中的元素. 因此为了得到 $f \in \mathrm{Fix}(\pi_n)$, 应该取 π 的轮换 $\sigma_1, \ldots, \sigma_{c(\pi)}$, 对 σ_i 的每个元素着同样的颜色. 对每个 σ_i 有 n 种选择, 因此共有 $n^{c(\pi)}$ 种被 π 固定的着色. 换句话说, $\#\mathrm{Fix}(\pi_n) = n^{c(\pi)}$, 再由 Burnside 引理本定理得证. □

现在我们不仅想得到使用 n 种颜色的不等价着色的总数 (total), 还要更进一步地规定每种颜色的出现次数. 我们需要的将不仅是每一个 $\pi \in G$ 的轮换数 $c(\pi)$, 而且需要 π 的每个轮换的长度. 因此对 n 元集合 X 上一个给定的置换 π, 定义 π 的型 (type) 为

$$\mathrm{type}(\pi) = (c_1, c_2, \ldots, c_n),$$

其中 π 有 c_i 个长度为 i 的轮换. 例如, 若 $\pi = 4, 7, 3, 8, 2, 10, 11, 1, 6, 9, 5$, 则

$$\begin{aligned} \mathrm{type}(\pi) &= \mathrm{type}\ (1,4,8)(2,7,11,5)(3)(6,10,9) \\ &= (1,0,2,1,0,0,0,0,0,0,0). \end{aligned}$$

注意到总有 $\sum_i ic_i = n$ [为什么]. 定义 π 的轮换指标 (cycle indicator) 为单项式

$$Z_\pi = z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots z_n^{c_n}.$$

(有很多别的记号来表示轮换指标. Z_π 来自于轮换的德文 Zyklus. Pólya 的原始论文是用德文写的.) 因此对上面的例子, $Z_\pi = z_1 z_3^2 z_4$.

现在对 $\mathfrak{S}_X$ 的给定子群 G, G 的轮换指标 (cycle indicator) (或轮换指数多项式 (cycle index polynomial 或 cycle enumerator) 定义为

$$Z_G = Z_G(z_1, \ldots, z_n) = \frac{1}{\#G} \sum_{\pi \in G} Z_\pi.$$

因此 Z_G (也表示为 P_G, $\mathrm{Cyc}(G)$ 等) 是一个关于变元 $z_1, \ldots, z_n$ 的多项式.

7.6 例　若 X 由一个正方形的顶点组成, G 是对 X 的旋转构成的群 (一个 4 阶循环群), 则

$$Z_G = \frac{1}{4}(z_1^4 + z_2^2 + 2z_4).$$

若还允许反射 (故 G 是 8 阶二面体群), 则

$$Z_G = \frac{1}{8}(z_1^4 + 3z_2^2 + 2z_1^2 z_2 + 2z_4).$$

现在可以叙述本章的主要结果了.

7.7 定理 (Pólya 定理, 1937)　设 G 为 n 元集合 X 上的置换群. $C = \{r_1, r_2, \ldots\}$ 为颜色集合. $\kappa(i_1, i_2, \ldots)$ 为使用 i_j 次颜色 r_j 的不等价着色 (在 G 的作用下) $f\colon X \to C$ 的个数. 定义

$$F_G(r_1, r_2, \ldots) = \sum_{i_1, i_2, \ldots} \kappa(i_1, i_2, \ldots) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots.$$

(因此, 根据 C 为有限还是无穷, F_G 分别为一个关于变元 $r_1, r_2, \ldots$ 的多项式或幂级数.) 则

$$F_G(r_1, r_2, \ldots) = Z_G(r_1 + r_2 + r_3 + \cdots, r_1^2 + r_2^2 + r_3^2 + \cdots, \ldots, r_1^j + r_2^j + r_3^j + \cdots, \ldots).$$

(换句话说, 将 Z_G 中的 z_j 用 $\sum_i r_i^j$ 替换.)

在给出证明之前, 我们来考虑一个例子.

7.8 例　假设在例 7.6 中, 颜色集合为 $C = \{a, b, c, d\}$, 且 G 为循环对称群. 则

$$\begin{aligned} F_G(a, b, c, d) &= \frac{1}{4}\left((a+b+c+d)^4 + (a^2+b^2+c^2+d^2)^2 + 2(a^4+b^4+c^4+d^4)\right) \\ &= (a^4 + \cdots) + (a^3 b + \cdots) + 2(a^2 b^2 + \cdots) + 3(a^2 bc + \cdots) + 6abcd, \end{aligned}$$

其中 $(a^2 b^2 + \cdots)$ 的表达式表示的是关于变元 a, b, c, d 且指数为 $2, 2, 0, 0$(以某种顺序) 的所有单项式的和. 所有这种单项式的系数都为 2, 表明用两种颜色均两次的不等价着色数为 2. 若 G 为完全二面体群, 则

$$F_G(a, b, c, d) = \frac{1}{8}\left((a+b+c+d)^4 + 3(a^2+b^2+c^2+d^2)^2\right.$$

$$+ 2(a+b+c+d)^2(a^2+b^2+c^2+d^2) + 2(a^4+b^4+c^4+d^4))$$
$$= (a^4+\cdots) + (a^3b+\cdots) + 2(a^2b^2+\cdots) + 2(a^2bc+\cdots) + 3abcd.$$

Pólya 定理的证明 设 $\#X = t$ 且 $i_1+i_2+\cdots = t$, 其中的每一个 $i_j \geqslant 0$. 设 $\boldsymbol{i} = (i_1, i_2, \ldots)$, 且 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}$ 表示 X 的所有着色的集合, 其中要求颜色 r_j 使用 i_j 次. 因为若 $f \in \mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}$ 和 $\pi \in G$, 则 $\pi \cdot f \in \mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}$, ("旋转" 一个着了色的对象, 并不改变该对象每种颜色出现的次数.) 所以群 G 作用在 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}$ 上. 用 $\pi_{\boldsymbol{i}}$ 表示 π 在 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}$ 上的作用. 我们希望应用 Burnside 引理来计算轨道数, 于是需要得到 $\#\mathrm{Fix}(\pi_{\boldsymbol{i}})$.

为了得到 $f \in \mathrm{Fix}(\pi_{\boldsymbol{i}})$, 对 X 的着色必须满足 (a) π 的任意一个轮换中, 各元素都着同样的颜色, (b) 颜色 r_j 出现 i_j 次. 考虑如下这个乘积项

$$H_\pi = \prod_j (r_1^j + r_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)},$$

其中 $c_j(\pi)$ 为 π 中 j-轮换 (j 长轮换) 的数目. 当我们将以上这个乘积项展开成单项式 $r_1^{j_1} r_2^{j_2}\cdots$ 的和时, 每一个单项式都是由 H_π 的每个因子中取一项 r_k^j 而后将其乘在一起所得. r_k^j 的选取对应于对某个 j-轮换的所有元素用颜色 r_k 着色. 因为 H_π 的因子 $r_1^j + r_2^j + \cdots$ 恰好出现 $c_j(\pi)$ 次, 所以在每一个因子中取一项 r_k^j 就对应于 X 的一个着色, 其每个轮换都是单色的 (即轮换中的所有元素都着同样的颜色). 这些项 r_k^j 的乘积就成了单项式 $r_1^{j_1} r_2^{j_2}\cdots$, 其中颜色 r_k 共使用了 j_k 次. 因此可得, H_π 展开式中 $r_i^{i_1} r_2^{i_2}\cdots$ 前的系数等于 $\#\mathrm{Fix}(\pi_{\boldsymbol{i}})$. 于是有

$$H_\pi = \sum_{\boldsymbol{i}} \#\mathrm{Fix}(\pi_{\boldsymbol{i}}) r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots. \tag{7.3}$$

现在将等式 (7.3) 的两边对所有的 $\pi \in G$ 求和, 然后除以 $\#G$. 左边变成了

$$\frac{1}{\#G} \sum_{\pi\in G} \prod_j (r_1^j + r_2^j + \cdots)^{c_j(\pi)} = Z_G(r_1 + r_2 + \cdots, r_1^2 + r_2^2 + \cdots, \ldots).$$

另一方面, 右边变成了

$$\sum_{\boldsymbol{i}} \left[\frac{1}{\#G} \sum_{\pi\in G} \#\mathrm{Fix}(\pi_{\boldsymbol{i}}) \right] r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots.$$

由 Burnside 引理, 方括号中的表达式正好就是作用在 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}$ 上的 $\pi_{\boldsymbol{i}}$ 的轨道数, 即使用颜色 r_j 共 i_j 次的不等价着色的个数, 正如所证. □

7.9 例 (项链) 长度为 ℓ 的一条项链 (necklace) 是对 ℓ 个 (着色的) 珠子的一个环形排列. 若一条项链通过旋转能得到另一条, 则认为这两条项链是相同的. 设 X 为 ℓ 个 (未着色的) 珠子的集合, 比如 $X = \{1, 2, \ldots, \ell\}$. 将这些珠子在一个圆环上按顺序 $1, 2, \ldots, \ell$ 等距排列, 设

G 为对 X 的旋转构成的循环群. 因此若 π 是轮换 $(1,2,\ldots,\ell)$, 则 $G=\{1,\pi,\pi^2,\ldots,\pi^{\ell-1}\}$. 例如, 若 $\ell=6$, 则 G 中的元素为

$$\begin{aligned}\pi^0 &= (1)(2)(3)(4)(5)(6),\\ \pi &= (1,2,3,4,5,6),\\ \pi^2 &= (1,3,5)(2,4,6),\\ \pi^3 &= (1,4)(2,5)(3,6),\\ \pi^4 &= (1,5,3)(2,6,4),\\ \pi^5 &= (1,6,5,4,3,2).\end{aligned}$$

一般地, 如果 d 是 m 和 ℓ 的最大公因子 (记为 $d=\gcd(m,\ell)$), 那么 π^m 有 d 个长为 ℓ/d 的轮换. 整数 m 满足 $1\leqslant m\leqslant \ell$ 和 $\gcd(m,\ell)=d$ 当且仅当 $1\leqslant m/d\leqslant \ell/d$ 和 $\gcd(m/d,\ell/d)=1$. 因此这样的整数 m 的个数等于欧拉 phi-函数 (或 totient 函数) $\varphi(\ell/d)$, 由定义知它等于满足 $1\leqslant i\leqslant \ell/d$ 和 $\gcd(i,\ell/d)=1$ 的整数 i 的个数. 作为旁白, 回顾 $\varphi(k)$ 能用下面这个公式计算

$$\varphi(k)=k\prod_{\substack{p|k\\ p\ \text{为素数}}}\left(1-\frac{1}{p}\right). \tag{7.4}$$

例如, $\varphi(1000)=1000(1-\frac{1}{2})(1-\frac{1}{5})=400$. 将以上所有这些都联系起来, 就得到了如下这个轮换指标 $Z_G(z_1,\ldots,z_\ell)$ 的公式:

$$Z_G(z_1,\ldots,z_\ell)=\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\varphi(\ell/d)z_{\ell/d}^d,$$

或 (用 d 代替 ℓ/d),

$$Z_G(z_1,\ldots,z_\ell)=\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\varphi(d)z_d^{\ell/d}.$$

再由 Pólya 定理可得如下结论 (在 Pólya 得到他的一般性结论之前, 该结论最初是由 P. A. MacMahon (1854—1929) 证明的).

7.10 定理 (a) 长度为 ℓ 的 n-着色项链数 $N_\ell(n)$ 为

$$N_\ell(n)=\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\varphi(\ell/d)n^d. \tag{7.5}$$

(b) 我们有

$$F_G(r_1,r_2,\ldots)=\frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\varphi(d)(r_1^d+r_2^d+\cdots)^{\ell/d}.$$

注 若 $r_1 = r_2 = \cdots = 1$ 则 (b) 就简化为 (a). 进一步地, 因为显然有 $N_\ell(1) = 1$, 在 (7.5) 中令 $n = 1$ 即得如下这个著名的等式

$$\sum_{d|\ell} \varphi(\ell/d) = \ell.$$

如果还允许将项链翻转, 而不仅仅是旋转, 那么情况会是怎样? 现在的群成了阶数为 2ℓ 的二面体群, 并且称与之对应的不等价着色为二面体项链 (dihedral necklace). 我们将下面这个轮换指标留给读者来计算.

$$\frac{1}{2\ell}\left(\sum_{d|\ell} \varphi(d) z_d^{\ell/d} + m z_1^2 z_2^{m-1} + m z_2^m\right), \quad 若\ \ell = 2m,$$

$$\frac{1}{2\ell}\left(\sum_{d|\ell} \varphi(d) z_d^{\ell/d} + \ell z_1 z_2^m\right), \quad 若\ \ell = 2m+1.$$

7.11 例 设 $G = \mathfrak{S}_\ell$ 为 $\{1, 2, \ldots, \ell\} = X$ 上的所有置换构成的群. 因此, 例如

$$Z_{\mathfrak{S}_3}(z_1, z_2, z_3) = \frac{1}{6}(z_1^3 + 3z_1z_2 + 2z_3),$$

$$Z_{\mathfrak{S}_4}(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{1}{24}(z_1^4 + 6z_1^2z_2 + 3z_2^2 + 8z_1z_3 + 6z_4).$$

很容易得到 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}$ 上的不等价着色数. 若 X 的两种着色使用的每种颜色次数都相同, 则显然通过 X 的某个 (some) 置换, 能将一种着色变成另一种. 因此 $\mathcal{C}_{\boldsymbol{i}}$ 由一个单轨道构成. 因而

$$F_{\mathfrak{S}_\ell}(r_1, r_2, \ldots) = \sum_{i_1+i_2+\cdots=\ell} r_1^{i_1} r_2^{i_2} \cdots,$$

即为所有次数为 ℓ 的单项式的和.

为了计算不等价的 n-着色的总数, 注意到

$$\sum_{\ell \geqslant 0} F_{\mathfrak{S}_\ell}(r_1, r_2, \ldots) x^\ell = \frac{1}{(1 - r_1x)(1 - r_2x)\cdots}, \tag{7.6}$$

上式成立是因为如果将右边的每一个因子展开成级数 $\sum_{j\geqslant 0} r_i^j x^j$ 而后做乘积, x^ℓ 的系数就正好是所有次数为 ℓ 的单项式的和. 对固定的 n, 用 $f_n(\ell)$ 表示 X 上的不等价 n-着色的数目. 因为 $f_n(\ell) = F_{\mathfrak{S}_\ell}(1, 1, \ldots, 1)$ (共有 n 个 1), 根据 (7.6) 可得

$$\sum_{\ell \geqslant 0} f_n(\ell) x^\ell = \frac{1}{(1-x)^n}.$$

右边能展开成 (例如用 Taylor 定理)

$$\frac{1}{(1-x)^n} = \sum_{\ell \geqslant 0} \binom{n+\ell-1}{\ell} x^\ell.$$

因此

$$f_n(\ell) = \binom{n+\ell-1}{\ell}.$$

读者很自然地可能会问, 上面这个简单的结果是否存在一个更直接的证明. 这实际上是初等计数组合学里一个标准的结果. 对固定的 ℓ 和 n, 我们希望得到 $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = \ell$ 的非负整数解的数目. 假设我们将 $n-1$ 条竖线和 ℓ 个点排成一行. 因为共有 $n+\ell-1$ 个位置, 选择其中的 ℓ 个位置来放点, 所以共有 $\binom{n+\ell-1}{\ell}$ 种排法. 例如, 对 $\ell = 8$ 和 $n = 7$ 的一个排法如下

$$| \, | \bullet\bullet | \bullet | \, | \bullet\bullet\bullet | \bullet\bullet$$

从左至右读出每个“隔间”的点数, 就得到了数 $i_1, \ldots, i_n$. 像上面这个例子, 我们有 $(i_1, \ldots, i_7) = (0, 0, 2, 1, 0, 3, 2)$. 因为 $i_1 + i_2 + \cdots + i_n = \ell$ 的解与竖线和点的排列之间的对应关系显然是个双射, 所以我们有 $\binom{n+\ell-1}{\ell}$ 组解.

回顾 (定理 7.5) X 的不等价 n-着色 (相对于 X 上的任意置换群 G) 的个数为

$$\frac{1}{\#G} \sum_{\pi \in G} n^{c(\pi)},$$

其中 $c(\pi)$ 表示 π 的轮换数. 因此对 $G = \mathfrak{S}_\ell$ 我们有如下的等式

$$\begin{aligned}\frac{1}{\ell!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_\ell} n^{c(\pi)} &= \binom{n+\ell-1}{\ell} \\ &= \frac{1}{\ell!} n(n+1)(n+2)\cdots(n+\ell-1).\end{aligned}$$

乘以 $\ell!$ 可得

$$\sum_{\pi \in \mathfrak{S}_\ell} n^{c(\pi)} = n(n+1)(n+2)\cdots(n+\ell-1). \tag{7.7}$$

等价地 [为什么], 若定义 $c(\ell, k)$ 为 $\mathfrak{S}_\ell$ 中具有 k 个轮换的置换的个数 (称为第一类无符号 Stirling 数 (signless Stirling number of the first kind)), 则

$$\sum_{k=1}^{\ell} c(\ell, k) x^k = x(x+1)(x+2)\cdots(x+\ell-1).$$

例如, $x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$, 因此 (取 x^2 项的系数) 11 个 $\mathfrak{S}_4$ 中的置换含两个轮换, 即 (123)(4), (132)(4), (124)(3), (142)(3), (134)(2), (143)(2), (234)(1), (243)(1), (12)(34), (13)(24), (14)(23).

虽然不计算轮换指标 $Z_{\mathfrak{S}_\ell}(z_1, \ldots, z_\ell)$ 也容易直接得到生成函数 $F_{\mathfrak{S}_\ell}(r_1, r_2, \ldots)$, 我们仍然想问是否存在这一多项式的某种计算公式. 首先我们具体地确定它的系数.

7.12 定理　设 $\sum ic_i = \ell$. 具有 c_i 个 i-轮换的置换 $\pi \in \mathfrak{S}_\ell$ 的个数 (或等价地, $\ell!\, Z_{\mathfrak{S}_\ell}(z_1, \ldots, z_\ell)$ 中 $z_1^{c_1} z_2^{c_2} \cdots$ 项的系数) 等于 $\ell!/1^{c_1} c_1!\, 2^{c_2} c_2! \cdots$.

例子　在 $\mathfrak{S}_{15}$ 中具有三个 1-轮换, 两个 2-轮换和两个 4-轮换的置换的个数等于 $15!/1^3 \cdot 3! \cdot 2^2 \cdot 2! \cdot 4^2 \cdot 2! = 851,350,500$.

定理 7.12 的证明　固定 $\boldsymbol{c} = (c_1, c_2, \ldots)$, 且设 $X_{\boldsymbol{c}}$ 为具有 c_i 个 i-轮换的所有置换 $\pi \in \mathfrak{S}_\ell$ 的集合. 在 $\mathfrak{S}_\ell$ 中给定一个置换 $\sigma = a_1 a_2 \cdots a_\ell$, 如下构造一个置换 $f(\sigma) \in X_{\boldsymbol{c}}$. 设 $f(\sigma)$ 的 1-轮换为 $(a_1), (a_2), \ldots, (a_{c_1})$. 然后设 $f(\sigma)$ 的 2-轮换为 $(a_{c_1+1}, a_{c_1+2}), (a_{c_1+3}, a_{c_1+4}), \ldots, (a_{c_1+2c_2-1}, a_{c_1+2c_2})$. 接着设 $f(\sigma)$ 的 3-轮换为 $(a_{c_1+2c_2+1}, a_{c_1+2c_2+2}, a_{c_1+2c_2+3}), (a_{c_1+2c_2+4}, a_{c_1+2c_2+5}, a_{c_1+2c_2+6}), \ldots, (a_{c_1+2c_2+3c_3-2}, a_{c_1+2c_2+3c_3-1}, a_{c_1+2c_2+3c_3})$, 等等, 继续下去直到到达 a_ℓ, 这样就生成了 $X_{\boldsymbol{c}}$ 中的一个置换. 例如, 若 $\ell = 11, c_1 = 3, c_2 = 2, c_4 = 1$, 且 $\sigma = 4, 9, 6, 11, 7, 1, 3, 8, 10, 2, 5$, 则

$$f(\sigma) = (4)(9)(6)(11, 7)(1, 3)(8, 10, 2, 5).$$

我们这就定义了一个函数 $f\colon \mathfrak{S}_\ell \to X_{\boldsymbol{c}}$. 对给定的 $\pi \in X_{\boldsymbol{c}}$, $\# f^{-1}(\pi)$ 为多少, 即通过 f 将多少个置换映射到了 π? 长度为 i 的轮换能写成 i 种方式, 即

$$(b_1, b_2, \ldots, b_i) = (b_2, b_3, \ldots, b_i, b_1) = \cdots = (b_i, b_1, b_2, \ldots, b_{i-1}).$$

进一步地, 有 $c_i!$ 种方式排列 c_i 个长为 i 的轮换. 因此

$$\# f^{-1}(\pi) = c_1!\, c_2!\, c_3! \cdots 1^{c_1} 2^{c_2} 3^{c_3} \cdots,$$

此数对任意的 $\pi \in X_{\boldsymbol{c}}$ 都相同. 由此可得

$$\begin{aligned} \# X_{\boldsymbol{c}} &= \frac{\# \mathfrak{S}_\ell}{c_1! c_2! \cdots 1^{c_1} 2^{c_2} \cdots} \\ &= \frac{\ell!}{c_1! c_2! \cdots 1^{c_1} 2^{c_2} \cdots}, \end{aligned}$$

正如所证. □

对多项式 $Z_{\mathfrak{S}_\ell}$ 本身, 有如下的结论. 记 $\exp y = \mathrm{e}^y$.

7.13 定理　我们有

$$\sum_{\ell \geqslant 0} Z_{\mathfrak{S}_\ell}(z_1, z_2, \ldots) x^\ell = \exp\left(z_1 x + z_2 \frac{x^2}{2} + z_3 \frac{x^3}{3} + \cdots \right).$$

证明 有些很精妙的方法来证明这一定理, 并 “解释” 为什么会出现指数函数, 但我们这里仅满足于给出一个 “朴素的” 计算证明. 记

$$\begin{aligned}
&\exp\left(z_1x+z_2\frac{x^2}{2}+z_3\frac{x^3}{3}+\cdots\right)\\
&\qquad= \mathrm{e}^{z_1x}\cdot \mathrm{e}^{z_2\frac{x^2}{2}}\cdot \mathrm{e}^{z_3\frac{x^3}{3}}\cdots\\
&\qquad= \left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{z_1^nx^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{z_2^nx^{2n}}{2^nn!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0}\frac{z_3^nx^{3n}}{3^nn!}\right)\cdots.
\end{aligned}$$

当将以上乘积展开, $z_1^{c_1}z_2^{c_2}\cdots x^\ell$ 项 (其中 $\ell=c_1+2c_2+\cdots$) 的系数为

$$\frac{1}{1^{c_1}c_1!\,2^{c_2}c_2!\cdots}=\frac{1}{\ell!}\left(\frac{\ell!}{1^{c_1}c_1!\,2^{c_2}c_2!\cdots}\right).$$

由定理 7.12, 这即为 $Z_{\mathfrak{S}_\ell}(z_1,z_2,\ldots)$ 中 $z_1^{c_1}z_2^{c_2}\cdots$ 项的系数, 得证. □

作为定理 7.13 的一个验证, 令每一个 $z_i=n$ 可得

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell\geqslant 0}Z_{\mathfrak{S}_\ell}(n,n,\ldots)x^\ell &= \exp\left(nx+n\frac{x^2}{2}+n\frac{x^3}{3}+\cdots\right)\\
&= \exp\left(n\left(x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots\right)\right)\\
&= \exp\left(n\log(1-x)^{-1}\right)\\
&= \frac{1}{(1-x)^n}\\
&= \sum_{\ell\geqslant 0}\binom{-n}{\ell}(-x)^\ell\\
&= \sum_{\ell\geqslant 0}\binom{n+\ell-1}{\ell}x^\ell,
\end{aligned}$$

以上最后一步可由一个容易验证的等式 $\binom{-n}{\ell}=(-1)^\ell\binom{n+\ell-1}{\ell}$ 得到. 在上面这一串等式中, 对等第一项和最后一项中 x^ℓ 的系数, 即得

$$\begin{aligned}
Z_{\mathfrak{S}_\ell}(n,n,\ldots) &= \binom{n+\ell-1}{\ell}\\
&= \frac{n(n+1)\cdots(n+\ell-1)}{\ell!},
\end{aligned}$$

这与定理 7.5 以及等式 (7.7) 一致.

定理 7.13 有很多计数上的应用. 作为例子, 这里我们给出一个这样的结果.

7.14 命题　设 $f(n)$ 为奇数阶置换 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 的数目. 等价地, 对某个奇数 k 有 $\pi^k = \iota$ (恒等置换). 则

$$f(n) = \begin{cases} 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (n-1)^2, & n \text{ 为偶数} \\ 1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2 \cdots (n-2)^2 \cdot n, & n \text{ 为奇数}. \end{cases}$$

证明　一个置换的阶数为奇数当且仅当它所有轮换的长度都是奇数. 因此 [为什么]

$$f(n) = n!\, Z_{\mathfrak{S}_n}(z_i = 1,\ i \text{ 为奇数}; z_i = 0,\ i \text{ 为偶数}).$$

在定理 7.13 中做如上替换可得

$$\sum_{n \geqslant 0} f(n) \frac{x^n}{n!} = \exp\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots\right).$$

因为 $-\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \cdots$, 所以 [为什么]

$$\begin{aligned} \sum_{n \geqslant 0} f(n) \frac{x^n}{n!} &= \exp\left(\frac{1}{2}\big(-\log(1-x) + \log(1+x)\big)\right) \\ &= \exp \frac{1}{2} \log\left(\frac{1+x}{1-x}\right) \\ &= \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}. \end{aligned}$$

我们因此需要得到 $\sqrt{(1+x)/(1-x)}$ 在 $x=0$ 处的幂级数展开式. 有一个简单的技巧:

$$\begin{aligned} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} &= (1+x)(1-x^2)^{-1/2} \\ &= (1+x) \sum_{m \geqslant 0} \binom{-1/2}{m} (-x^2)^m \\ &= \sum_{m \geqslant 0} (-1)^m \binom{-1/2}{m} \left(x^{2m} + x^{2m+1}\right), \end{aligned}$$

其中, 由定义可知

$$\binom{-1/2}{m} = \frac{1}{m!}\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)\cdots\left(-\frac{2m-1}{2}\right).$$

常规的计算即可验证 $\sqrt{(1+x)/(1-x)}$ 中 $x^n/n!$ 的系数与题设中 $f(n)$ 的值一致. □

布尔代数的商 我们将展示怎样应用 Pólya 理论来计算一个商偏序集 B_X/G 中给定秩的元素个数. 这里 X 是一个有限集合, B_X 是 X 的所有子集构成的布尔代数, G 是 X 上的置换群 (在 B_X 上有一个导出作用). 问 X 上的着色和它的子集有什么关系? 答案很简单: 下面这个常规法则建立了 2-着色 $f\colon X \to \{0,1\}$ 和 X 的子集 S_f 之间的对应.

$$s \in S_f \Longleftrightarrow f(s) = 1.$$

注意到两个 2-着色 f 和 g 是 G-等价的当且仅当 S_f 和 S_g 位于 G 的同一轨道 (作用在 B_X 上). 因此, X 上有 i 个值等于 1 的不等价 2-着色 f 的数目正好就是 $\#(B_X/G)_i$ (B_X/G 中秩为 i 的元素个数). 直接应用 Pólya 定理 (定理 7.7) 就得到下面这个结论.

7.15 推论 我们有

$$\sum_i \#(B_X/G)_i\, q^i = Z_G(1+q, 1+q^2, 1+q^3, \ldots).$$

证明 如果 $\kappa(i,j)$ 表示 X 上不等价 2-着色的数目, 其中要求仅用颜色 0 和 1, 且 0 使用了 j 次, 1 使用了 i 次 (故 $i+j=\#X$), 那么由 Pólya 定理可得

$$\sum_{i,j} \kappa(i,j) x^i y^j = Z_G(x+y, x^2+y^2, x^3+y^3, \ldots).$$

令 $x=q$ 且 $y=1$ 即得题设结论 [为什么]. □

结合推论 7.15 与 B_X/G 的秩单峰性 (定理 5.8) 就得到如下推论.

7.16 推论 对一个有限集合 X 上的任意一个有限置换群 G, 多项式 $Z_G(1+q, 1+q^2, 1+q^3, \ldots)$ 有对称的和单峰的整数系数.

7.17 例 (a) 对例 5.4(a) 中的偏序集 P, 有 $G = \{(1)(2)(3), (1,2)(3)\}$, 于是 $Z_G(z_1,z_2,z_3) = \frac{1}{2}(z_1^3 + z_1 z_2)$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{3} (\#P_i) q^i &= \frac{1}{2}\left((1+q)^3 + (1+q)(1+q^2)\right)\\ &= 1 + 2q + 2q^2 + q^3.\end{aligned}$$

(b) 对例 5.4(b) 中的偏序集 P, 有 $G = \{(1)(2)(3)(4)(5), (1,2,3,4,5), (1,3,5,2,4), (1,4,2,5,3), (1,5,4,3,2)\}$, 于是 $Z_G(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5) = \frac{1}{5}(z_1^5 + 4z_5)$. 因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{5} (\#P_i) q^i &= \frac{1}{5}\left((1+q)^5 + 4(1+q^5)\right)\\ &= 1 + q + 2q^2 + 2q^3 + q^4 + q^5.\end{aligned}$$

注意到我们在等价地在对长度为 5 的 2-着色项链计数 (如例 7.9 中定义), 比如说对长度为 5 的红色和蓝色珠子项链, 根据蓝色珠子的数目分类计数.

(c) 设 X 为 2×2 棋盘上的方块, 如下进行标记:

1	2
3	4

设 G 为第6章中定义的圈积 $\mathfrak{S}_2 \wr \mathfrak{S}_2$. 则

$$G=\{(1)(2)(3)(4),(1,2)(3)(4),(1)(2)(3,4),(1,2)(3,4),\\ (1,3)(2,4),(1,4)(2,3),(1,3,2,4),(1,4,2,3)\},$$

于是

$$Z_G(z_1,z_2,z_3,z_4)=\frac{1}{8}(z_1^4+2z_1^2z_2+3z_2^2+2z_4).$$

因此

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{4}(\#P_i)q^i&=\frac{1}{8}\left((1+q)^4+2(1+q)^2(1+q^2)+3(1+q^2)^2+2(1+q^4)\right)\\&=1+q+2q^2+q^3+q^4\\&=\binom{\mathbf{4}}{\mathbf{2}},\end{aligned}$$

与定理 6.6 一致.

使用一些更精妙的方法 (比如对称群表示论), 能证明推论 7.16 的如下推广: 设 $P(q)$ 为任意一个具有对称、单峰、非负整数系数的多项式, 比如 $1+q+3q^2+3q^3+8q^4+3q^5+3q^6+q^7+q^8$ 或 q^5+q^6 $(=0+0q+\cdots+0q^4+q^5+q^6+0q^7+\cdots+0q^{11})$. 则多项式 $Z_G(P(q),P(q^2),P(q^3),\dots)$ 具有对称、单峰、非负的整数系数.

图　Pólya 理论的一个标准应用是对非同构图的计数. 在第5章的结尾我们看到, 若 M 是一个 m 元顶点集, $X=\binom{M}{2}$, $\mathfrak{S}_m^{(2)}$ 是由 M 上的置换导出的 X 上的置换群, 则 X 的 i 元子集的一个轨道可视为顶点集为 M 且具有 i 条边的图的一个同构类. 因此 $\#(B_X/\mathfrak{S}_m^{(2)})_i$ 是顶点集为 M 且具有 i 条边的非同构图 (没有自环和重边) 的个数. 若 $g_i(m)$ 表示具有 m 个顶点和 i 条边的非同构图的个数, 则由推论 7.15 可得

$$\sum_{i=0}^{\binom{m}{2}}g_i(m)q^i=Z_{\mathfrak{S}_m^{(2)}}(1+q,1+q^2,1+q^3,\dots).$$

故我们需要计算的是轮换指标 $Z_{\mathfrak{S}_m^{(2)}}(z_1,z_2,\dots)$. 若 M 上的两个置换 π 和 σ 有相同的轮换型 (每个长度的轮换的个数), 则它们对 X 的作用也具有相同的轮换型 [为什么]. 因此对 M

上的置换的每一种可能的轮换型 (即对 m 的每一个分拆), 需要计算 X 上的导出轮换型. 由定理 7.12 已知 M 上每种型的置换的个数. 对一些比较小的 m, 能选取每种型的某一置换 π 来直接计算它在 X 上的作用, 而得到导出的轮换型. 对 $m=4$ 有:

π 的轮换长度	个数	π	导出置换 π'	π' 的轮换长度
1, 1, 1, 1	1	(1)(2)(3)(4)	(12)(13)(14)(23)(24)(34)	1, 1, 1, 1, 1, 1
2, 1, 1	6	(1, 2)(3)(4)	(12)(12, 23)(14, 24)(34)	2, 2, 1, 1
3, 1	8	(1, 2, 3)(4)	(12, 23, 13)(14, 24, 34)	3, 3
2, 2	3	(1, 2)(3, 4)	(12)(13, 24)(14, 23)(34)	2, 2, 1, 1
4	6	(1, 2, 3, 4)	(12, 23, 34, 14)(13, 24)	4, 2

由此可得

$$Z_{\mathfrak{S}_4^{(2)}}(z_1,z_2,z_3,z_4,z_5,z_6)=\frac{1}{24}(z_1^6+9z_1^2z_2^2+8z_3^2+6z_2z_4).$$

若令 $z_i=1+q^i$ 并化简, 就得到多项式

$$\sum_{i=0}^{6}g_i(4)q^i=1+q+2q^2+3q^3+2q^4+q^5+q^6.$$

实际上, 这一多项式与图 5.1 所示的偏序集的秩生成函数一致.

假设我们想计算具有四个顶点和 i 条边的非同构图的数目 $h_i(4)$, 但现在允许任意两个顶点间至多可以有两条 (two) 边. 仍然可以像之前一样, 取 M, X 和 $G=\mathfrak{S}_4^{(2)}$, 但现在用三种颜色: 无边用红色, 一条边用蓝色, 两条边用黄色. 单项式 $r^ib^jy^k$ 对应于如下这种着色: 其中有 i 对顶点间均无边, j 对顶点间均有一条边, k 对顶点间均有两条边. 边的总数 e 为 $j+2k$. 因此若令 $r=1, b=q, y=q^2$, 则单项式 $r^ib^jy^k$ 变成 $q^{j+2k}=q^e$. 由此可得

$$\begin{aligned}\sum_{i=0}^{12}h_i(4)q^i&=Z_{\mathfrak{S}_4^{(2)}}(1+q+q^2,1+q^2+q^4,1+q^3+q^6,\dots)\\&=\frac{1}{24}\big((1+q+q^2)^6+9(1+q+q^2)^2(1+q^2+q^4)^2\\&\quad+8(1+q^3+q^6)^2+6(1+q^2+q^4)(1+q^4+q^8)\big)\\&=1+q+3q^2+5q^3+8q^4+9q^5+12q^6+9q^7+8q^8+5q^9\\&\quad+3q^{10}+q^{11}+q^{12}.\end{aligned}$$

故 (边的重数至多为 2 的) 四顶点非同构图的总数为 $\sum_i h_i(4)=66$.

现在应该很清楚, 若将边的重数限制到小于等于 r, 则对应的生成函数为 $Z_{\mathfrak{S}_4^{(2)}}(1+q+q^2+\cdots+q^{r-1}, 1+q^2+q^4+\cdots+q^{2r-2}, \ldots)$. 特别地, 为了得到 (边的重数至多为 r 的) 四顶点非同构图的总数 (total) $N(r,4)$, 简单地令每一个 $z_i = r$, 可得

$$\begin{aligned} N(r,4) &= Z_{\mathfrak{S}_4^{(2)}}(r,r,r,r,r,r) \\ &= \frac{1}{24}(r^6+9r^4+14r^2). \end{aligned}$$

这等于集合 $X = \binom{M}{2}$ (其中 $\#M = 4$) 上的不等价 r-着色的个数 [为什么].

当然类似的推理能应用到任意顶点数的情形. 五个顶点时, 有下表 (用如同 1^5 的记号来表示五个 1 的一个序列).

π 的轮换长度	个数	π	导出置换 π'	π' 的轮换长度
1^5	1	$(1)(2)(3)(4)(5)$	$(12)(13)\cdots(45)$	1^{10}
$2, 1^3$	10	$(1,2)(3)(4)(5)$	$(12)(13,23)(14,25)(15,25)(34)(35)(45)$	$2^3, 1^4$
$3, 1^2$	20	$(1,2,3)(4)(5)$	$(12,23,13)(14,24,34)(15,25,35)(45)$	$3^3, 1$
$2^2, 1$	15	$(1,2)(3,4)(5)$	$(12)(13,24)(14,23)(15,25)(34)(35,45)$	$2^4, 1^2$
$4, 1$	30	$(1,2,3,4)(5)$	$(12,23,34,14)(13,24)(15,25,35,45)$	$4^2, 2$
$3, 2$	20	$(1,2,3)(4,5)$	$(12,23,13)(14,25,34,15,24,35)(45)$	$6, 3, 1$
5	24	$(1,2,3,4,5)$	$(12,23,34,45,15)(13,24,35,14,25)$	5^2

因此

$$Z_{\mathfrak{S}_5^{(2)}}(z_1,\ldots,z_{10}) = \frac{1}{120}(z_1^{10}+10z_1^4z_2^3+20z_1z_3^3+15z_1^2z_2^4+30z_2z_4^2+20z_1z_3z_6+24z_5^2),$$

由上式可得

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{10} g_i(5)q^i &= Z_{\mathfrak{S}_5^{(2)}}(1+q, 1+q^2, \ldots, 1+q^{10}) \\ &= 1+q+2q^2+4q^3+6q^4+6q^5+6q^6+4q^7+2q^8+q^9+q^{10}. \end{aligned}$$

对任意顶点数 $m = \#M$ 的情形, 存在具体的公式可以得到 $\pi \in \mathfrak{S}_M$ 在 $\binom{M}{2}$ 上的导出作用的轮换指标, 因此可以避免像上文表格中那样来具体计算 π', 但 $Z_{\mathfrak{S}_m^{(2)}}$ 的全体表达式不能被极大化简, 或是像定理 7.13 中那样将其放入一个简单的生成函数. 作为一个参考, 有

$$Z_{\mathfrak{S}_6^{(2)}} = \frac{1}{6!}(z_1^{15}+15z_1^7z_2^4+40z_1^3z_3^4+45z_1^3z_2^6+90z_1z_2z_4^3+120z_1z_2z_3^2z_6$$

$$+ 144z_5^3 + 15z_1^3 z_2^6 + 90z_1 z_2 z_4^3 + 40z_3^5 + 120z_3 z_6^2)$$

$$(g_0(6), g_1(6), \ldots, g_{15}(6)) = (1, 1, 2, 5, 9, 15, 21, 24, 24, 21, 15, 9, 5, 2, 1, 1).$$

此外, 若 $u(n)$ 表示 n 个顶点的非同构简单图的个数, 则

$$\begin{aligned}&(u(0), u(1), \ldots, u(11))\\ &= (1, 1, 2, 4, 11, 34, 156, 1044, 12346, 274668, 12005168, 1018997864).\end{aligned}$$

对 $n \leqslant 75$ 的 $u(n)$ 参见

`http://oeis.org/A000088/b000088.txt`

特别地,

$$\begin{aligned}u(75) = {}&91965776790545918117055311393231179873443957239\\ &0555232344598910500368551136102062542965342147\\ &8723210428876893185920222186100317580740213865\\ &7140377683043095632048495393006440764501648363\\ &4760490012493552274952950606265577383468983364\\ &6883724923654397496226869104105041619919159586\\ &8518775275216748149124234654756641508154401414\\ &8480274454866344981385848105320672784068407907\\ &1134767688676890584660201791139593590722767979\\ &8617445756819562952590259920801220117529208077\\ &0705444809177422214784902579514964768094933848\\ &3173060596932480677345855848701061537676603425\\ &1254842843718829212212327337499413913712750831\\ &0550986833980707875560051306072520155744624852\\ &0263616216031346723897074759199703968653839368\\ &7763608064327592656680387259609907 2,\end{aligned}$$

它是一个 726 位的数! 比较

$$\frac{2^{\binom{75}{2}}}{75!} = .91965776790545918 09 \times 10^{726},$$

这与 $u(75)$ 的前 17 位数一致 [为什么].

第 7 章注记

Burnside 引理 (引理 7.2) 实际上最初是由 Frobenius [40, end of §4] 阐述并证明. Frobenius 转而相信 Cauchy [18, p. 286] 证明了传递情形的引理. Burnside 在他著作的第 1 版 [14, §118–119] 中, 将引理归功于 Frobenius, 但在第 2 版 [15] 中没有再提及. Burnside 引理的更多历史, 请见 [79] 以及 [121]. 现在有很多作者称这个结果为 Cauchy-Frobenius 引理.J. H. Redfield [91] 最先考虑了轮换指标$Z_G(z_1, z_2, \ldots)$ (其中 G 是 $\mathfrak{S}_n$ 的一个子群), 称为*群约化函数*(group reduction function), 并将其表示为 Grf(G). G. Pólya [84] 独立定义了轮换指标, 证明了基本定理 7.7, 并给出了大量的应用. Pólya 文章的英文翻译版本, 见 [85]. Pólya 的很多工作可在 Redfield 的工作中预见. 关于 Redfield 的工作以及它与 Pólya 理论之间关系的有趣历史资料, 请见 [49, 51, 69, 92] (都在 *Journal of Graph Theory* 的同一期中). 维基百科中的文章 "John Howard Redfield" 也给了一些资料和参考文献, 抒写了关于 Redfield 工作的再发现和重要性的有趣故事.

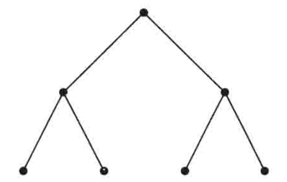
Pólya 定理在非同构图计数上的应用出现在 Pólya 的原始文章 [84]. 图上计数的很多额外工作, 见 Harary 和 Palmer 的著作 [50].

继 Pólya 的工作之后, 出现了大量对 Pólya 理论的展示、应用以及推广. 相关推广的一个例子见练习 7.11. 我们这里仅提及由 N. G. de Bruijn 写的优美综述 [25].

定理 7.13 (对称群 $\mathfrak{S}_\ell$ 的轮换指标 $Z_{\mathfrak{S}_\ell}$ 的生成函数) 可追溯至 Frobenius (见 [41, bottom of p. 152 of GA]) 和 Hurwitz [60, §4]. 虽然他们没有将定理 7.13 具体表述出来, 但很明显他们已意识到了这个定理. 更为概念化的方法以及更深层次的问题见 R. Stanley [108, §5.1–5.2].

第 7 章练习

1. 对顶点集为 V 的一个简单图 Γ, 可以定义 Γ 的*自同构* (automorphism) 为一个双射 $\varphi\colon V \to V$, 使得 u 和 v 邻接当且仅当 $\varphi(u)$ 和 $\varphi(v)$ 邻接. 在复合运算下自同构全体构成一个群, 称之为 Γ 的*自同构群* (automorphism group) Aut(Γ). 令 Γ 如下图所示.



设 G 为 Γ 的自同构群, 于是 G 的阶数等于 8.

(a) 群 G 作用于 Γ 的顶点时, 其轮换指数多项式是什么?

(b) 在 Γ 的对称性下, 用 n 种颜色对 Γ 的顶点进行着色, 有多少种方法?

2. 一个正四面体 T 有四个顶点, 六条边和四个三角形. T 的旋转对称性 (不允许反射) 构成了一个阶数为 12 的群 G.

(a) 群 G 作用于 T 的*顶点* (vertex) 时, 其轮换指数多项式是什么?

(b) 在旋转对称性下, 用 n 种颜色对 T 的顶点进行着色, 有多少种方法?

(c) 在旋转对称性下, 若是对 T 的*六条边* (edges) 着色, 情形会是怎样?

3. 存在多少条有 n 个红色珠子和 n 个蓝色珠子的项链 (在循环对称性下)? (将答案表示成一个遍历 n 的所有因子 d 的和式.)

4. (与本文并不直接相关) *本原* (primitive) 项链是没有对称性的项链, 即只有恒等旋转能保持项链不变. 设 $M_\ell(n)$ 表示有 ℓ 个珠子的本原 n-着色项链的数目. 证明

$$M_\ell(n) = \frac{1}{\ell}\sum_{d|\ell}\mu(\ell/d)n^d,$$

其中 μ 表示数论中的莫比乌斯函数. (对比等式 (7.5).)

5. 十只球叠在一个三角队列中, 每层分别按 1, 2, 3, 4 只球的顺序堆放. (想象台球) 三角队列在二维平面中可以自由旋转.

(a) 求出使用十种颜色 $r_1, r_2, \ldots, r_{10}$ 的不等价着色数的生成函数. (答案不需要化简.)

(b) 有四个红球, 三个绿球和三个浅黄色球的不等价着色数是多少? 有四个红球, 四个青色球和两个浅蓝色球的不等价着色数又是多少?

6. 8 阶二面体群 D_4 作用在一个 8×8 棋盘 B 的 64 个方块的集合 X 上. 在 D_4 作用意义下, 求出在 X 中选取两个子集 $S\subseteq T$ 的方法数. 例如, 共有八个子集对 S 和 T, 使得 S 是拐角处的单个方块 s 并且 T 为 $\{s,t\}$, 其中 t 与 s 邻接 (即与 s 有一条共同的边), 这些子集对都属于 D_4 同一轨道. 将答案写成一个 (简短的) 有限和.

7. 对 ℓ 元集合 X 上的置换群 G, 设 $f(n)$ 为 X 上的不等价 n-着色数 (在 G 的作用下). 计算 $\lim_{n\to\infty} f(n)/n^\ell$. 解释答案为 X 上的着色 "多数" 是不对称的 (没有对称性).

8. 设 X 为一个有限集合, G 为对称群 $\mathfrak{S}_X$ 的子群. 假设对 X 上的 n-着色作用的 G 的

轨道数为如下这个多项式

$$f(n)=\frac{1}{443520}(n^{11}+540n^9+\cdots+10n).$$

(a) 问 G 的阶数 (元素个数) 为多少?

(b) 问 X 的大小 $\#X$ 等于多少?

(c) G 中有多少对换? 对换 (transposition) 是互换 X 中两个元素, 且保持其他元素不动的置换.

(d) 作用于 X 上的 G 有多少条轨道?

(e) 证明 G 不是一个单群. 若多于一个元素的群 G 仅有 G 和 $\{1\}$ 这两个正规子群, 则称 G 为*单群* (simple group).

9. 已知存在一个 27 阶的非交换 (nonabelian) 群 G, 使得对所有的 $x\in G$ 有 $x^3=1$. 利用这个事实给出一个例子, 说明在某个有限集合 X 上的 $\mathfrak{S}_X$ 有两个非同构有限子群 G 和 H, 使得 $Z_G=Z_H$.

10. (有些困难) 设 $N_G(n)$ 为定理 7.5 中的多项式, 并且 $\#X=d$. 证明 $(-1)^dN_G(-n)$ 等于 X 上的不等价 n-着色 $f\colon X\to[n]$ 的个数, 其中要求 G 中固定 f 的子群 H (即对所有的 $\pi\in H$ 有 $\pi\cdot f=f$) 包含在交错群 $\mathfrak{A}_X$ 中. 可以称这一结论为多项式 $N_G(n)$ 的*互反定理* (reciprocity theorem).

11. (困难) 假设有限群 G 作用在有限集合 X 上, 且另一有限群 H 作用在颜色集合 C 上. 称两着色 $f,g\colon X\to C$ 等价 (equivalent), 若存在置换 $\pi\in G$ 和 $\sigma\in H$ 使得对所有的 $x\in X$ 有

$$f(x)=\sigma\cdot g(\pi\cdot x).$$

因此这里不仅允许 G 的某一元素置换 X 的元素, 而且还可以通过 H 的某一元素来置换颜色. 证明不等价着色的总数为

$$Z_G\left(\frac{\partial}{\partial z_1},\frac{\partial}{\partial z_2},\frac{\partial}{\partial z_3},\cdots\right)Z_H\left(\mathrm{e}^{z_1+z_2+z_3+\cdots},\mathrm{e}^{2(z_2+z_4+z_6+\cdots)},\mathrm{e}^{3(z_3+z_6+z_9+\cdots)},\ldots\right)$$

在 $z_1=z_2=z_3=\cdots=0$ 处的值.

例子　设 n 为有四个珠子的 2-着色项链的数目, 其中我们也可以通过交换两种颜色来得到等价着色. 因此 $Z_G=\frac{1}{4}(z_1^4+z_2^2+2z_4)$ 和 $Z_H=\frac{1}{2}(z_1^2+z_2)$. 于是

$$\begin{aligned}
n&=\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\left(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}+2\frac{\partial}{\partial z_4}\right)\left(\mathrm{e}^{2(z_1+z_2+z_3+\cdots)}+\mathrm{e}^{2(z_2+z_4+z_6+\cdots)}\right)\Big|_{z_i=0}\\
&=\frac{1}{8}\left(\frac{\partial^4}{\partial z_1^4}+\frac{\partial^2}{\partial z_2^2}+2\frac{\partial}{\partial z_4}\right)\left(\frac{(2z_1)^4}{4!}+\frac{(2z_2)^2}{2!}+\frac{2z_4}{1!}+\frac{(2z_2)^4}{4!}+\frac{2z_4}{1!}\right)\Big|_{z_i=0}\\
&=\frac{1}{8}(16+4+4+4+4)
\end{aligned}$$

$$= 4.$$

四种不等价的项链为 0000, 1000, 1100, 1010.

12. (a) 设 $e_6(n)$ 表示满足 $\pi^6 = \iota$ (恒等置换) 的置换 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 的数目. 找出如下这个生成函数的一个简单公式.

$$E_6(x) = \sum_{n \geqslant 0} e_6(n) \frac{x^n}{n!}.$$

(b) 对任意的 $k \geqslant 1$, 将结果推广至 $e_k(n) = \#\{\pi \in \mathfrak{S}_n : \pi^k = \iota\}$.

13. 设 $f(n)$ 为对称群 $\mathfrak{S}_n$ 中 (所有轮换的长度都为偶数的) 置换的数目. 例如, $f(4) = 9$ 和 $f(11) = 0$.

(a) 设

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{x^n}{n!}.$$

求出 $F(x)$ 的一个简单表达式. 答案应该不涉及任何的求和符号 (或它们的等价形式)、对数函数或函数 e^x.

(b) 利用 (a) 得到 $f(n)$ 的一个简单公式.

(c) 给出 (b) 的一个组合证明.

14. (困难) 给出命题 7.14 的一个组合证明. 尽管命题 7.14 和练习 7.13 类似, 但后者比前者用组合方法证明容易得多.

15. 设 $c(w)$ 表示置换 $w \in \mathfrak{S}_n$ 的轮换数. 对 $w \in \mathfrak{S}_n$, 用 $f(n)$ 表示 $c(w)(c(w)-1)$ 的平均值, 即

$$f(n) = \frac{1}{n!} \sum_{w \in \mathfrak{S}_n} c(w)\big(c(w) - 1\big).$$

(令 $f(0) = 1$.) 找出生成函数 $\sum_{n \geqslant 0} f(n) t^n$ 的一个简单公式.

16. (a) (*) 设 $n \geqslant 1$, 且 G 为 $\mathfrak{S}_n$ 的一个奇数阶子群. 证明商偏序集 B_n/G 中秩为偶数和秩为奇数的元素个数相等.

(b) 按如下方式推广 (a): 给出关于 $\mathfrak{S}_n$ 的子群 G 的一个充分必要条件, 要求用 G 中元素的轮换长度表示, 使得 B_n/G 中秩为偶数和秩为奇数的元素个数相等.

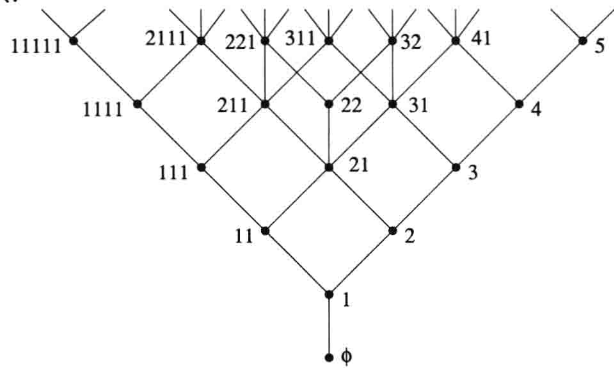
17. 设 $c(\ell, k)$ 表示 $\mathfrak{S}_\ell$ 中具有 k 个轮换的置换的个数. 证明序列

$$c(\ell, 1), c(\ell, 2), \ldots, c(\ell, \ell)$$

是强 log-凹的.

第 8 章　杨表初探

我们在第6章中定义了杨格 Y ——全体非负整数的所有分拆构成的偏序集, 序为它们的杨图间的包含关系.



这里我们关心的是 Y 的 Hasse 图 (看做是一个图) 上特定游动的计数. 注意到因为 Y 是无限的, 所以不能考虑它的特征值和特征向量. 我们需要不同方法来对游动计数. 为方便起见, 我们将游动的长度表示为 n, 而不是之前章节所用的 ℓ.

注意到 Y 是一个 (秩为无限的) 分次偏序集, 其中的每个 Y_i 由 i 的所有分拆构成. 换句话说, 我们有 $Y = Y_0 \cup Y_1 \cup \cdots$ (无交并), 其中每条极大链与每个水平 Y_i 恰好相交一次. 与有限分次偏序集一样, 称 Y_i 为 Y 的第 i 层*水平* (level).

因为 Y 的 Hasse 图是一个简单图 (没有自环和重边), 所以长为 n 的游动就指定为 Y 的一个顶点序列 $\lambda^0, \lambda^1, \ldots, \lambda^n$. 称偏序集的 Hasse 图上的游动为 Hasse *游动* (Hasse walk). 每个 λ^i 是某一整数的分拆, 并且要么 (a) $\lambda^i < \lambda^{i+1}$ 且 $|\lambda^i| = |\lambda^{i+1}| - 1$, 要么 (b) $\lambda^i > \lambda^{i+1}$ 且 $|\lambda^i| = |\lambda^{i+1}| + 1$. (回顾一下, 对分拆 λ, $|\lambda|$ 为 λ 的所有分量和.) 形如 (a) 的一步移动表示为 U (“up” 的首字母, 意为向上, 因为我们在 Hasse 图上向上移动了), 而形如 (b) 的一步移动表示为 D (“ down” 的首字母, 意为向下). 若游动 W 的每一步分别为 $A_1, A_2, \ldots, A_n$, 其中每个 A_i 为 U 或 D, 则称 W 的型 (type) 为 $A_n A_{n-1} \cdots A_2 A_1$. 注意到游动的型的记法与游动的顺序*相反* (opposite). 这是因为我们即将把 U 和 D 视为线性变换, 而线性变换的乘积是*从右至左* (right-to-left) 的 (与通常从左至右的阅读顺序相反). 例如 (将分拆 $(\lambda_1, \ldots, \lambda_m)$ 缩写成 $\lambda_1 \cdots \lambda_m$), 则游动 $\emptyset, 1, 2, 1, 11, 111, 211, 221, 22, 21, 31, 41$ 的型就是 $UUDDUUUUDUU = U^2 D^2 U^4 D U^2$.

对开始于 $\emptyset$ 的 U^n 型游动有一个很好的组合解释. 这种游动当然正好是饱和链 $\emptyset = \lambda^0 \lessdot \lambda^1 \lessdot \cdots \lessdot \lambda^n$. 换句话说, 可以将它们视为开始于空图, 每一步添加一个新方块的杨图序列. U^5 型游动的一个例子为

ϕ

可以将以上游动这样来表述: 取出最后一个图, 如果第 i 步添加的方块为 s, 那么在 s 中填上 i. 因此可将以上游动编译成一个 "表"

1	2
3	5
4	

称这样的对象 τ 为标准杨表 (standard Young tableau) (或 SYT). 它由整数 n 的某个分拆的杨图 D, 连同填入 D 中方块的数 $1, 2, \ldots, n$ 构成, 使得每个数恰好出现一次, 且每行每列都是递增的 (increasing). 称 λ 为 SYT τ 的形状 (shape), 记为 $\lambda = \mathrm{sh}(\tau)$. 例如, 存在如下五个形状为 $(2, 2, 1)$ 的 SYT:

1	2
3	4
5	

1	2
3	5
4	

1	3
2	4
5	

1	3
2	5
4	

1	4
2	5
3	

用 f^λ 表示形状为 λ 的 SYT 的数目, 例如 $f^{(2,2,1)} = 5$. f^λ 有很多有趣的性质, 比如, 存在一个计算它们的著名显式公式——Frame-Robinson-Thrall 钩长公式. 虽然下文并不需要, 但为了完整性, 我们陈述而不证明这一公式.

设 u 是分拆 λ 的杨图中的一个方块. 定义 u (或在 u) 的钩 (hook) $H(u)$ 为 u 本身及其正右方和正下方所有方块的集合. 称 $H(u)$ 的大小 (方块数) 为 u (或在 u) 的钩长 (hook length), 表示为 $h(u)$. 在分拆 $(4, 2, 2)$ 的下图中, 我们在其每一个方块 u 中填上了它的钩长 $h(u)$.

6	5	2	1
3	2		
2	1		

8.1 定理 (钩长公式)　设 $\lambda \vdash n$. 则

$$f^\lambda = \frac{n!}{\prod_{u \in \lambda} h(u)}.$$

这里的记号 $u \in \lambda$ 表示 u 遍历 λ 的杨图中的所有方块.

例如, 由如上 $\lambda = (4,2,2)$ 的钩长图可得

$$f^{(4,2,2)} = \frac{8!}{6\cdot 5\cdot 2\cdot 1\cdot 3\cdot 2\cdot 2\cdot 1} = 56.$$

本章中我们将关注 SYT 与杨格上游动的计数之间的联系. 如果 $w = A_n A_{n-1}\cdots A_1$ 是关于 U 和 D 的字, 且 $\lambda \vdash n$, 那么用 $\alpha(w,\lambda)$ 表示 Y 中型为 w, 开始于空分拆 $\emptyset$, 终止于 λ 的 Hasse 游动的数目. 例如, $\alpha(UDUU, 11) = 2$, 对应的游动为 $\emptyset, 1, 2, 1, 11$ 和 $\emptyset, 1, 11, 1, 11$. 因而特别地, $\alpha(U^n,\lambda) = f^\lambda$ [为什么]. 类似地, 因为型为 $D^n U^n$, 开始于 $\emptyset$, 到达分拆 $\lambda \vdash n$, 而后回到 $\emptyset$ 的 Hasse 游动数为 $(f^\lambda)^2$, 所以

$$\alpha(D^n U^n, \emptyset) = \sum_{\lambda\vdash n} (f^\lambda)^2. \tag{8.1}$$

我们的目标是得到 $\alpha(w,\lambda)$ 的一个形如 $f^\lambda c_w$ 的具体公式, 其中 c_w 与 λ 无关. (预见这样公式的存在性一点也不显然.) 特别地, 因为 $f^\emptyset = 1$, 通过令 $\lambda = \emptyset$, 我们将得到型为 w, 从 $\emptyset$ 到 $\emptyset$ 的 (闭) Hasse 游动数的一个简单公式 (包含了 (8.1) 的简单公式).

如下引理给出了一个简单的条件, 用于判断型为 w, 从 $\emptyset$ 到 λ 的任意 (any) Hasse 游动的存在性.

8.2 引理 假设 $w = D^{s_k}U^{r_k}\cdots D^{s_2}U^{r_2}D^{s_1}U^{r_1}$, 其中 $r_i \geqslant 0$ 和 $s_i \geqslant 0$. 设 $\lambda \vdash n$. 则存在一个型为 w, 从 $\emptyset$ 到 λ 的 Hasse 游动当且仅当:

$$\sum_{i=1}^{k}(r_i - s_i) = n,$$

$$\text{对}1 \leqslant j \leqslant k\ \text{有} \sum_{i=1}^{j}(r_i - s_i) \geqslant 0.$$

证明 因为一个 U 向上移动一个水平, 而一个 D 向下移动一个水平, 所以型为 w, 开始于 $\emptyset$ 的游动最后到达的水平为 $\sum_{i=1}^{k}(r_i - s_i)$. 故 $\sum_{i=1}^{k}(r_i - s_i) = |\lambda| = n$.

经过 $\sum_{i=1}^{j}(r_i + s_i)$ 步后, 我们将到达第 $\sum_{i=1}^{j}(r_i - s_i)$ 层水平. 因为最低的水平是 0, 所以对 $1 \leqslant j \leqslant k$ 必须有 $\sum_{i=1}^{j}(r_i - s_i) \geqslant 0$.

引理中的两个条件, 足以保证型为 w, 从 $\emptyset$ 到 λ 的 Hasse 游动的存在性, 证明比较简单, 留给读者. □

若 w 是一个关于 U 和 D 的字, 且满足引理 8.2 的条件, 则称 w 是一个有效的 (valid) λ-字 (word). 注意到成为有效 λ-字的条件仅与 $|\lambda|$ 有关.

$\alpha(w,\lambda)$ 的公式的证明是基于类似于由等式 (4.2) 和 (4.3) 所定义的线性变换. 如同第4章, 设 $\mathbb{R}Y_j$ 是基为 Y_j 的实向量空间. 对所有的 $\lambda \vdash i$, 定义两个线性变换 $U_i\colon \mathbb{R}Y_i \to \mathbb{R}Y_{i+1}$ 和 $D_i\colon \mathbb{R}Y_i \to \mathbb{R}Y_{i-1}$:

$$U_i(\lambda) = \sum_{\substack{\mu \vdash i+1 \\ \lambda < \mu}} \mu,$$

$$D_i(\lambda) = \sum_{\substack{\nu \vdash i-1 \\ \nu < \lambda}} \nu.$$

例如 (用分拆的缩写记号)

$$U_{21}(54422211) = 64422211 + 55422211 + 54432211 + 54422221 + 544222111,$$

$$D_{21}(54422211) = 44422211 + 54322211 + 54422111 + 5442221.$$

显然 [为什么], 如果 r 是 λ 中不同 (distinct)(即不相等的) 分量的个数, 那么 $U_i(\lambda)$ 是一个 $r+1$ 项的和式, 而 $D_i(\lambda)$ 是一个 r 项的和式. 下面引理是 B_n 中相应结果 (引理 4.6) 对 Y 的模拟.

8.3 引理 对任意的 $i \geqslant 0$, 我们有

$$D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = I_i, \tag{8.2}$$

其中 I_i 是 $\mathbb{R}Y_i$ 上的恒等线性变换.

证明 将 (8.2) 的左边作用于 i 的一个分拆 λ, 然后按 Y_i 的基展开, 再考虑某个分拆 μ 的系数. 若 $\mu \neq \lambda$ 且 μ 能通过在 λ (的杨图) 中添加一个方块 s, 而后移除一个 (必然不同的) 方块 t 得到, 则 s 和 t 的选择是唯一的. 因而在 $D_{i+1}U_i(\lambda)$ 中 μ 的系数等于 1. 此时, 也存在唯一的一种方式从 λ 中移除一个方块, 而后添加一个方块来得到 μ, 即移除 t 而后添加 s. 因而在 $U_{i-1}D_i(\lambda)$ 中 μ 的系数也等于 1, 故当 (8.2) 的左边作用于 λ 时, μ 的系数等于 0.

若 $\mu \neq \lambda$ 且不能通过在 λ 中添加一个方块而后去掉一个方块来得到 μ (即 μ 和 λ 多于两行是不同的), 则显然当 (8.2) 的左边作用于 λ 时, μ 的系数为 0.

最后考虑 $\lambda = \mu$ 的情形. 设 r 是 λ 中不同 (不相等) 分量的个数. 因为有 $r+1$ 种方式在 λ 中添加一个方块而后移除它来得到 λ 本身, 而有 r 种方式去掉一个方块而后添加它来还原 λ, 所以 λ 在 $D_{i+1}U_i(\lambda)$ 中的系数为 $r+1$, 而在 $U_{i-1}D_i(\lambda)$ 中的系数为 r. 因此当 (8.2) 的左边作用于 λ 时, λ 的系数等于 1.

结合以上三种情形的结论, 可得 (8.2) 的左边正好就是 I_i, 得证. □

现在可得本章的主要定理之一.

8.4 定理 设 λ 是一个分拆, 且 $w = A_n A_{n-1} \cdots A_1$ 是一个有效的 λ-字. 设 $S_w = \{i\colon A_i = D\}$. 对每一个 $i \in S_w$, 令 a_i 为 w 中位于 A_i 右边的 D 的数目, b_i 为 w 中位于 A_i 右边的 U 的数目. 于是在进行 $A_i = D$ 步之前我们在 Y 中的水平为 $b_i - a_i$. 那么有

$$\alpha(w, \lambda) = f^\lambda \prod_{i \in S_w} (b_i - a_i).$$

证明定理 8.4 之前, 先给出一个例子. 假设 $w = U^3D^2U^2DU^3 = UUUDDUUDUUU$ 且 $\lambda = (2, 2, 1)$. 则 $S_w = \{4, 7, 8\}$ 以及 $a_4 = 0$, $b_4 = 3$, $a_7 = 1$, $b_7 = 5$, $a_8 = 2$, $b_8 = 5$. 我们之前已经看到 $f^{221} = 5$. 因此

$$\alpha(w, \lambda) = 5(3 - 0)(5 - 1)(5 - 2) = 180.$$

定理 8.4 的证明 为了简化记号, 我们将省略线性变换 U_i 和 D_i 的下标. 这不会引起混淆, 因为下标由 U 和 D 作用的元素唯一决定. 例如, 对 $\lambda \vdash i$ 的表达式 $UDUU(\lambda)$, 必然是 $U_{i+1}D_{i+2}U_{i+1}U_i(\lambda)$; 否则就没有了定义, 因为 U_j 和 D_j 仅能作用在 $\mathbb{R}Y_j$ 的元素上, 此外, U_j 提升一个水平, 而 D_j 降低一个水平.

由 (8.2), 在以字母 U 和 D 组成的任意字 y 中, 可以将 DU 替换成 $UD + I$. 这就将 y 替换成了两个字的和, 其中一个减少了一个 D, 另一个是将一个 D 向右移动了一位. 例如, 在 $UUDUDDU$ 中将第一个 DU 替换成 $UD + I$, 可得 $UUUDDDU + UUDDU$. 如果开始于字 w 而重复这一操作, 即不断地将字中的 DU 替换成 $UD + I$, 那么最终任意一个 D 的右边都没有 U. 这时, 我们就将 w 表示成了形如 U^iD^j 的字的一个 (整系数的) 线性组合. 因为将 DU 替换成 $UD + I$ 的操作保持每个字中 U 与 D 的个数之差不变, 所以所有形如 U^iD^j 的字中的 $i - j$ 都等于某一常数 n (即 w 中 U 与 D 的数目之差). 具体而言, 我们有

$$w = \sum_{i-j=n} r_{ij}(w) U^i D^j, \tag{8.3}$$

其中每一个 $r_{ij}(w) \in \mathbb{Z}$. (我们也对 $i < 0$ 或 $j < 0$ 定义 $r_{ij}(w) = 0$.) 我们将证明 $r_{ij}(w)$ 由 w 唯一确定. 或等价地 [为什么], 如果有

$$\sum_{i-j=n} d_{ij} U^i D^j = 0 \tag{8.4}$$

(看做是作用于空间 $\mathbb{R}Y_k$ 上的一个线性变换等式, 其中的 k 为任意 (any) 整数), 其中的每一个 $d_{ij} \in \mathbb{Z}$ (或某些读者更偏好 $d_{ij} \in \mathbb{R}$), 那么每一个 $d_{ij} = 0$. 设 j' 为使得 $d_{j'+n,j'} \neq 0$ 的最小整数. 设 $\mu \vdash j'$, 并将等式 (8.4) 的左右两边都作用于 μ. 则左边仅有一个非零项, 即 $j = j'$ 对应的项 [为什么]. 而另一方面, 等式右边却等于 0, 矛盾. 因此 $r_{ij}(w)$ 是唯一的.

现在将 U 作用于等式 (8.3) 的左边, 可得

$$Uw = \sum_{i,j} r_{ij}(w) U^{i+1} D^j.$$

因此 (利用 r_{ij} 的唯一性)[为什么]

$$r_{ij}(Uw) = r_{i-1,j}(w). \tag{8.5}$$

下面我们将 D 作用于 (8.3) 的左边. 通过对 i 归纳容易证明 (留作练习)

$$DU^i = U^i D + iU^{i-1}. \tag{8.6}$$

(我们将 U^{-1} 解释为 0, 以便使等式 (8.6) 对 $i=0$ 也成立.) 因此

$$\begin{aligned} Dw &= \sum_{i,j} r_{ij}(w) DU^i D^j \\ &= \sum_{i,j} r_{ij}(w)(U^i D + iU^{i-1}) D^j, \end{aligned}$$

由此可得 [为什么]

$$r_{ij}(Dw) = r_{i,j-1}(w) + (i+1) r_{i+1,j}(w). \tag{8.7}$$

在 (8.5) 和 (8.7) 中令 $j=0$ 即得

$$r_{i0}(Uw) = r_{i-1,0}(w), \tag{8.8}$$

$$r_{i0}(Dw) = (i+1) r_{i+1,0}(w). \tag{8.9}$$

现在将 (8.3) 作用于 $\emptyset$. 因为对所有的 $j>0$ 有 $D^j(\emptyset)=0$, 所以 $w(\emptyset) = r_{n0}(w) U^n(\emptyset)$. 故在 $w(\emptyset)$ 中 λ 的系数为

$$\alpha(w,\lambda) = r_{n0}(w)\alpha(U^n,\lambda) = r_{n0} f^\lambda,$$

其中 $\lambda \vdash n$. 显然由 (8.8) 和 (8.9) 可得

$$r_{n0}(w) = \prod_{j\in S_w} (b_j - a_j),$$

定理得证. □

注 有可能存在定理 8.4 的一个更简单的证明, 但我们给出的证明对没有出现在这里的一些推广非常有用.

上面定理的一个有趣特例是来计算等式 (8.1).

8.5 推论 我们有

$$\alpha(D^nU^n, \emptyset) = \sum_{\lambda \vdash n} (f^\lambda)^2 = n!.$$

证明 在定理 8.4 中设 $w = D^nU^n$, 则 $S_w = \{n+1, n+2, \ldots, 2n\}$, $a_i = i - n - 1$ 且 $b_i = n$, 由此即得推论的证明. □

注 (对熟悉有限群表示论的读者) 可以证明对 $\lambda \vdash n$, f^λ 等于对称群 $\mathfrak{S}_n$ 的不可约表示的次数. 鉴于此, 推论 8.5 是如下这个结果的特例: 有限群 G 的不可约表示的次数的平方和等于 G 的阶数 $\#G$. $\mathfrak{S}_n$ 的表示论与关于杨格和杨表的组合学有着很多密切的联系. 基于 RSK 算法 (algorithm) (以 Gilbert de Beauregard Robinson, Craige Schensted 和 Donald Knuth 的名字命名) 或者叫 Robinson-Schensted 对应 (correspondence), 也有推论 8.5 的一个优美的组合证明. RSK 算法有很多迷人的性质, 并与表示论有深刻的联系. 本章末的附录 1 中, 我们给出了 RSK 算法的一个描述以及推论 8.5 的组合证明.

现在考虑定理 8.4 的一个变形, 其中我们不再关心型为 w, 从 $\emptyset$ 到 λ 的 Hasse 游动, 而仅考虑固定步数的情形. 例如, 从 $\emptyset$ 到分拆 1 的长度为 3 的 Hasse 游动共有三条, 分别为 $\emptyset, 1, \emptyset, 1$; $\emptyset, 1, 2, 1$ 以及 $\emptyset, 1, 11, 1$. 用 $\beta(\ell, \lambda)$ 表示从 $\emptyset$ 到 λ 的长度为 ℓ 的 Hasse 游动数. 注意下面两个简单的事实:

(F1) $\beta(\ell, \lambda) = 0$, 除非 $\ell \equiv |\lambda| \pmod 2$.

(F2) 将 $(D+U)^\ell(\emptyset)$ 展开成分拆的线性组合, 则 $\beta(\ell, \lambda)$ 等于展开式中 λ 的系数.

因为 (F2) 的原因, 一件重要的事是将 $(D+U)^\ell$ 写成形如 U^iD^j 的项的线性组合, 正如定理 8.4 的证明中一样, 我们将一个关于 U 和 D 的字 w 写成了这种形式. 故定义整数 $b_{ij}(\ell)$ 为

$$(D+U)^\ell = \sum_{i,j} b_{ij}(\ell) U^i D^j. \tag{8.10}$$

正如定理 8.4 的证明所述, 数 $b_{ij}(\ell)$ 都存在并且是定义良好的.

8.6 引理 若 $\ell - i - j$ 是奇数, 则 $b_{ij}(\ell) = 0$. 若 $\ell - i - j = 2m$ 则

$$b_{ij}(\ell) = \frac{\ell!}{2^m\, i!\, j!\, m!}. \tag{8.11}$$

证明 对 $\ell - i - j$ 为奇数的论断等价于以上的 (F1), 因此假设 $\ell - i - j$ 是偶数. 通过对 ℓ 归纳来证明. 容易验证当 $\ell = 1$ 时 (8.11) 成立. 现在假设题设对某一固定的 $\ell \geqslant 1$ 成立. 由 (8.10) 可得

$$\sum_{i,j} b_{ij}(\ell+1) U^i D^j = (D+U)^{\ell+1}$$

$$= (D+U)\sum_{i,j} b_{ij}(\ell)U^iD^j$$
$$= \sum_{i,j} b_{ij}(\ell)(DU^iD^j + U^{i+1}D^j).$$

在定理 8.4 的证明中已知 $DU^i = U^iD + iU^{i-1}$ (见等式 (8.6)). 因此

$$\sum_{i,j} b_{ij}(\ell+1)U^iD^j = \sum_{i,j} b_{ij}(\ell)(U^iD^{j+1} + iU^{i-1}D^j + U^{i+1}D^j). \tag{8.12}$$

紧接 (8.10) 之后我们提到, $(D+U)^{\ell+1}$ 关于 U^iD^j 的展开式是唯一的. 因而对等等式 (8.12) 左右两边 U^iD^j 的系数即得如下递归式

$$b_{ij}(\ell+1) = b_{i,j-1}(\ell) + (i+1)b_{i+1,j}(\ell) + b_{i-1,j}(\ell). \tag{8.13}$$

做一个常规的验证即可知, 函数 $\ell!/2^m i!j!m!$ 与 $b_{ij}(\ell)$ 满足相同的递归式 (8.13), 并且具有相同的初值 $b_{00}(0)=1$. 由此通过归纳可完成证明. □

由引理 8.6 容易证明下面的结论.

8.7 定理 设 $\ell \geqslant n$ 且 $\lambda \vdash n$, 其中 $\ell - n$ 为偶数. 则

$$\beta(\ell,\lambda) = \binom{\ell}{n}(1\cdot 3\cdot 5\cdots(\ell-n-1))f^\lambda.$$

证明 将等式 (8.10) 两边作用于 $\emptyset$. 因为 $U^iD^j(\emptyset)=0$, 除非 $j=0$, 所以

$$(D+U)^\ell(\emptyset) = \sum_i b_{i0}(\ell)U^i(\emptyset)$$
$$= \sum_i b_{i0}(\ell)\sum_{\lambda\vdash i} f^\lambda\lambda.$$

由引理 8.6, 对 $\ell - i$ 为偶数有 $b_{i0}(\ell) = \binom{\ell}{i}(1\cdot 3\cdot 5\cdots(\ell-n-1))$, 再由 (F2) 可得证. □

注 定理 8.7 的证明仅需知道 $b_{i0}(\ell)$ 的值. 然而, 在引理 8.6 中我们计算了对所有的 j, $b_{ij}(\ell)$ 的值. 可以有一个仅计算 $b_{i0}(\ell)$ 的证明, 但我们给出了 $b_{ij}(\ell)$ 的全体值, 因为它非常简单.

8.8 推论 Y 中从 $\emptyset$ 到 $\emptyset$ 的长度为 $2m$ 的 Hasse 游动的总数等于

$$\beta(2m,\emptyset) = 1\cdot 3\cdot 5\cdots(2m-1).$$

证明 在定理 8.7 中做简单的替换 $\lambda=\emptyset$ (因此 $n=0$) 以及 $\ell=2m$ 即可得证. □

我们能对 Y 上不同种类的 Hasse 游动计数, 这一事实表明可能存在与 Y 相关的某些有限图, 它们的特征值是可以计算的. 的确如此, 这里我们将讨论最简单的情形. (推广的情形见练习 8.21.) 用 $Y_{j-1,j}$ 表示将杨格 Y 限制在 $j-1$ 和 j 的秩上. 将 $Y_{j-1,j}$ 等同于它的 Hasse 图, 并视为一个 (二部) 图. 设 $p(i) = \#Y_i$ 为 i 的分拆数.

8.9 定理 $Y_{j-1,j}$ 的特征值如下：0 是重数为 $p(j)-p(j-1)$ 的特征值；对 $1\leqslant s\leqslant j$, $\pm\sqrt{s}$ 是重数为 $p(j-s)-p(j-s-1)$ 的特征值.

证明 用 $\boldsymbol{A}$ 表示 $Y_{j-1,j}$ 的邻接矩阵. 因为 $\mathbb{R}Y_{j-1,j}=\mathbb{R}Y_{j-1}\oplus\mathbb{R}Y_j$ (向量空间的直和), 所以任意的向量 $v\in\mathbb{R}Y_{j-1,j}$ 可以唯一地写成 $v=v_{j-1}+v_j$, 其中 $v_i\in\mathbb{R}Y_i$. 矩阵 $\boldsymbol{A}$ 对向量空间 $\mathbb{R}Y_{j-1,j}$ 的作用如下 [为什么]:

$$\boldsymbol{A}(v)=D(v_j)+U(v_{j-1}). \tag{8.14}$$

正如从引理 4.6 得到定理 4.7 那样, 从引理 8.3 能推导出对任意的 i, $U_i\colon\mathbb{R}Y_i\to\mathbb{R}Y_{i+1}$ 是单射, 而 $D_i\colon\mathbb{R}Y_i\to\mathbb{R}Y_{i-1}$ 是满射. 故特别地,

$$\begin{aligned}\dim\ker(D_i)&=\dim\mathbb{R}Y_i-\dim\mathbb{R}Y_{i-1}\\&=p(i)-p(i-1),\end{aligned}$$

其中 ker 表示核.

情形 1 设 $v\in\ker(D_j)$, 于是 $v=v_j$. 则 $\boldsymbol{A}v=Dv=0$. 因此 $\ker(D_j)$ 是 $\boldsymbol{A}$ 对应于特征值 0 的特征空间, 故 0 是重数至少为 $p(j)-p(j-1)$ 的特征值.

情形 2 设 $v\in\ker(D_s)$ 对某一 $0\leqslant s\leqslant j-1$ 成立. 设

$$v^*=\pm\sqrt{j-s}U^{j-1-s}(v)+U^{j-s}(v).$$

注意到 $v^*\in\mathbb{R}Y_{j-1,j}$, 其中 $v^*_{j-1}=\pm\sqrt{j-s}U^{j-1-s}(v)$ 和 $v^*_j=U^{j-s}(v)$. 用等式 (8.6) 可以计算

$$\begin{aligned}\boldsymbol{A}(v^*)&=U(v^*_{j-1})+D(v^*_j)\\&=\pm\sqrt{j-s}\,U^{j-s}(v)+DU^{j-s}(v)\\&=\pm\sqrt{j-s}\,U^{j-s}(v)+U^{j-s}D(v)+(j-s)U^{j-s-1}(v)\\&=\pm\sqrt{j-s}\,U^{j-s}(v)+(j-s)U^{j-s-1}(v)\\&=\pm\sqrt{j-s}\,v^*.\end{aligned} \tag{8.15}$$

容易验证 (利用 U 是单射), 若 $v(1),\ldots,v(t)$ 是 $\ker(D_s)$ 的一组基, 则 $v(1)^*,\ldots,v(t)^*$ 是线性无关的. 因此由 (8.15) 可得 $\pm\sqrt{j-s}$ 是 $\boldsymbol{A}$ 的重数至少为 $t=\dim\ker(D_s)=p(s)-p(s-1)$ 的特征值.

我们一共得到了

$$p(j)-p(j-1)+2\sum_{s=0}^{j-1}\big(p(s)-p(s-1)\big)=p(j-1)+p(j)$$

个 $\boldsymbol{A}$ 的特征值. (以上的因子 2 来自于 $+\sqrt{j-s}$ 和 $-\sqrt{j-s}$ 都是特征值.) 因为图 $Y_{j-1,j}$ 仅有 $p(j-1)+p(j)$ 个顶点, 所以我们已得到了它的全部特征值. □

下面是定理 8.9 的一个优美的组合推论.

8.10 推论 固定 $j \geqslant 1$. 选取 j 的一个分拆 λ, (在保持还是一个分拆的情况下) 从 λ 中删除一个方块, 再插入一个方块, 而后再删除一个方块, 等等, 共进行了 m 次插入和 m 次删除, 最终变回 λ, 这样的操作方法数为:

$$\sum_{s=1}^{j}\big[p(j-s)-p(j-s-1)\big]s^m,\ m>0. \tag{8.16}$$

证明 $Y_{j-1,j}$ 中长为 $2m$ 的闭游动恰有一半开始于 Y_j 中的元素 [为什么]. 因此若 $Y_{j-1,j}$ 的特征值为 $\theta_1,\ldots,\theta_r$, 则由推论 1.3, 所求的游动数就是 $\frac{1}{2}(\theta_1^{2m}+\cdots+\theta_r^{2m})$. 利用定理 8.9 给出的 $\theta_1,\ldots,\theta_r$ 的值即得 (8.16). □

例如, 当 $j=7$ 时, 等式 (8.16) 为 $4+2\cdot 2^m+2\cdot 3^m+4^m+5^m+7^m$. 当 $m=1$ 时可得 30, 即为图 $Y_{6,7}$ 中的边数 [为什么].

附录 1: RSK 算法

我们将描述置换 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 和具有相同形状 $\lambda \vdash n$ 的 SYT 对 (P,Q) 之间的一个双射. 定义近似杨表 (near Young tableau) (NYT) 为各元素无需是整数 $1,2,\ldots,n$, 而可以是任意不同整数的 SYT. 设 P_{ij} 表示位于 P 中第 i 行 j 列的元素. RSK 算法的基本操作由行插入 (row insertion) $P \leftarrow k$ 构成, 即在一个 NYT $P=(P_{ij})$ 中插入一个正整数 k. 操作 $P \leftarrow k$ 的定义如下: 设 r 为使得 $P_{1r} > k$ 的最小整数. 若不存在这样的 r (即 P 的第一行中的所有元素都比 k 小), 则将 k 放在第一行的末尾. 这时插入操作终止, 而得到的 NYT 就是 $P \leftarrow k$. 另一方面, 如果 r 存在, 则将 P_{1r} 替换成 k. 同时 k 将 $P_{1r} := k'$ “冲击” 进入第二行, 即按照刚才描述的插入规则, 将 k' 插入进 P 的第二行. 要么 k' 插入进第二行的末尾, 则操作终止, 要么它将一个元素 k'' 冲击进入第三行, 继续下去直到有一个元素插入进某一行的末尾 (也可能是新的一行中的第一个元素), 操作终止. 最后得到的数组就是 $P \leftarrow k$.

8.11 例 设

$$P = \begin{matrix} 3 & 7 & 9 & 14 \\ 6 & 11 & 12 & \\ 10 & 16 & & \\ 13 & & & \\ 15 & & & \end{matrix}$$

$P \leftarrow 8$ 展示如下, 其中每行中插入的元素 (要么被冲击, 要么是第四行的最后一次插入) 用黑体标出. 因此 8 冲击 9, 9 冲击 11, 11 冲击 16, 而 16 插入到一行的末尾. 因此

$$(P \leftarrow 8) = \begin{matrix} 3 & 7 & \mathbf{8} & 14 \\ 6 & \mathbf{9} & 12 & \\ 10 & \mathbf{11} & & \\ 13 & \mathbf{16} & & \\ 15 & & & \end{matrix}$$

若 P 是不包含 k 的 NYT, 则 $P \leftarrow k$ 也是 NYT. 我们省略这一事实的证明, 因为它相当直接. 现在可以描述 RSK 算法了. 设 $\pi = a_1a_2\cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$. 我们将归纳地构造具有相同形状的 NYT 对 (P_i,Q_i) 的序列 $(P_0,Q_0),(P_1,Q_1),\ldots,(P_n,Q_n)$, 其中 P_i 和 Q_i 都有 i 个方块. 首先, 定义 $(P_0,Q_0)=(\emptyset,\emptyset)$. 若已经定义了 (P_{i-1},Q_{i-1}), 则令 $P_i = P_{i-1} \leftarrow a_i$. 换句话说, 通过对 P_{i-1} 行插入 a_i 来得到 P_i. 现在定义 Q_i 为将 i 插入进 Q_{i-1} 所得的 NYT, 并使得 Q_i 和 P_i 具有相同的形状. (Q_{i-1} 的元不改变; 我们仅将 i 放入一个特定的新方块, 而不是将其行插入进 Q_{i-1}.) 最后令 $(P,Q)=(P_n,Q_n)$. 记 $\pi \xrightarrow{\text{RSK}} (P,Q)$.

8.12 例　设 $\pi = 4273615 \in \mathfrak{S}_7$. NYT 对 $(P_1, Q_1), \ldots, (P_7, Q_7) = (P, Q)$ 如下:

P_i	Q_i
4	1
2 4	1 2
27 4	13 2
23 47	13 24
236 47	135 24
136 27 4	135 24 6
135 26 47	135 24 67

8.13 定理　RSK 算法定义了对称群 $\mathfrak{S}_n$ 和所有具有相同形状的 SYT 对的集合之间的一个双射, 其中形状 λ 是 n 的一个分析.

证明 (概略)　关键的步骤是定义 RSK 的逆. 换句话说, 如果 $\pi \mapsto (P, Q)$, 那么怎样才能从 (P, Q) 唯一地恢复 π? 进一步地, 我们需要对任意的 (any) (P, Q), 得到与之对应的 π. 注意到 Q 中被 n 所占据的位置是插入操作中最后被占据的位置. 假设在 P 中 k 占据了这个位置. 它是由 k 的上一行中的某一元素 j 冲击而来, j 是它目前所在行中比 k 小的最大元素. 因此我们能将 k "反冲击" 回 j 所占据的位置, 然后将 j 以同样步骤反冲击到它的上一行中. 最终有一个元素将被放入第一行中, 同时将另一个元素 t 反冲击出杨表. 因此 t 就是插入过程中 π 的最后一个元素, 即若 $\pi = a_1 a_2 \cdots a_n$ 则 $a_n = t$. 现在取 Q 中由 $n-1$ 占据的位置, 而后重复刚才的过程, 可得 a_{n-1}. 这样继续下去, 每次从右至左地得到一个元素, 最终我们唯一地构造出了 π, 并使得 $\pi \mapsto (P, Q)$. □

RSK 算法给出了推论 8.5 的一个双射证明, 即

$$\sum_{\lambda \vdash n} (f^{\lambda})^2 = n!.$$

附录 2: 平面分拆

这一附录中, 我们将说明如何从 RSK 算法的一个推广得到整数分拆的一个二维推广的优美生成函数. 整数 $n \geqslant 0$ 的*平面分拆* (plane partition) 是一个二维数组 $\pi = (\pi_{ij})_{i,j \geqslant 1}$, 其中 $\pi_{ij} \geqslant 0$ 是整数, 且数组的每行和每列都是弱递减的, 即

$$\pi_{ij} \geqslant \pi_{i+1,j}, \quad \pi_{ij} \geqslant \pi_{i,j+1},$$

并使得 $\sum_{i,j} \pi_{ij} = n$. 由此可得除了有限多个 π_{ij} 外, 其他元素均为 0, 在写一个具体的平面分拆 π 时, 这些 0 通常省略. 给定一个平面分拆 π, 用 $|\pi| = n$ 表示 π 是 n 的一个平面分拆. 更一般地, 若 L 为任意一个非负整数的数组, 则我们用 $|L|$ 来表示 L 的所有分量 (元) 的和.

仅有一个 0 的平面分拆, 即所有的 $\pi_{ij} = 0$, 记为 $\emptyset$. 整数 $0 \leqslant n \leqslant 3$ 的平面分拆为

$\emptyset$	1	2	11	1	3	21	111	11	2	1
				1				1	1	1
										1

若 $\mathrm{pp}(n)$ 表示 n 的平面分拆的个数, 则 $\mathrm{pp}(0) = 1$, $\mathrm{pp}(1) = 1$, $\mathrm{pp}(2) = 3$, 以及 $\mathrm{pp}(3) = 6$.

我们的目标是给出如下生成函数的一个公式

$$F(x) = \sum_{n \geqslant 0} \mathrm{pp}(n) x^n = 1 + x + 3x^2 + 6x^3 + 13x^4 + 24x^5 + \cdots.$$

更一般地, 我们将考虑至多有 r 行以及至多有 s 列的平面分拆, 即对 $i > r$ 或 $j > s$ 有 $\pi_{ij} = 0$. 作为一个简单的预热, 先考虑 n 的普通分拆 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 的情形.

8.14 命题 设 $p_s(n)$ 表示至多有 s 个分量的 n 的分拆数. 等价地, $p_s(n)$ 是至多有一行且至多有 s 列的 n 的平面分拆数 [为什么]. 则

$$\sum_{n \geqslant 0} p_s(n) x^n = \prod_{k=1}^{s} (1 - x^k)^{-1}.$$

证明 首先注意到分拆 λ 至多有 s 个分量当且仅当它的共轭分拆 λ' (定义见第 6 章) 的最大分量至多为 s. 因此, 仅需得到 $\sum_{n\geqslant 0} p'_s(n)x^n$ 的生成函数, 其中 $p'_s(n)$ 表示最大分量至多为 s 的 n 的分拆数. 将每一个因子 $(1-x^k)^{-1}$ 展开成几何级数可得

$$\prod_{k=1}^{s}\frac{1}{1-x^k}=\prod_{k=1}^{s}\left(\sum_{m_k\geqslant 0}x^{m_k k}\right).$$

我们怎样才能得到 x^n 的系数? 必须从乘积项的每个因子中取一项 $x^{m_k k}$ ($1\leqslant k\leqslant s$), 并使得

$$n=\sum_{k=1}^{s}m_k k.$$

然而, 这样的选取方法与选取 n 的分拆 λ, 并使得分量 k 出现 m_k 次的方法一致. 例如, 若 $s=4$ 并取 $m_1=5$, $m_2=0$, $m_3=1$, $m_4=2$, 则选取的是 16 的分拆 $\lambda=(4,4,3,1,1,1,1,1)$. 因此, x^n 的系数就是最大分量至多为 s 的 n 的分拆数, 正如所证. □

注意到命题 8.14 在某种意义上是 “平凡的”, 因为它可以通过检验直接得到. 如下两者之间存在一个显然的对应关系: (a) 对 x^n 的系数有贡献的项的选取与 (b) 最大分量至多为 s 的 n 的分拆. 虽然平面分拆的生成函数也很简单, 但是它的正确性却一点也不显然.

平面分拆与标准杨表有一定的相似性, 因此 RSK 的一个变形可以适用就不奇怪了. 我们将考虑*列严格平面分拆* (column-strict plane partition) (CSPP), 而不是 NYT. CSPP 是每一列的非零元素都*严格* (strict) 递减的平面分拆. 它的一个例子如下:

$$\begin{matrix}7&7&4&3&3&3&1\\4&3&3&1&&&\\3&2&&&&&\\2&1&&&&&\\1&&&&&&\end{matrix}\qquad(8.17)$$

称以上 CSPP 的*形状* (shape) 为 $\lambda=(7,4,2,2,1)$, 也就是数字所占据的杨图的形状, 它有 5 行, 7 列以及 16 个分量 (因此 $\lambda\vdash 16$).

若 $P=(P_{ij})$ 是一个 CSPP 且 $k\geqslant 1$, 则如下来定义*行插入* (row insertion) $P\leftarrow k$: 设 r 为使得 $P_{1,r}<k$ 的最小整数. 若不存在这样的 r (即 P 的第一行中所有元素都大于或等于 k), 则将 k 放在第一行的末尾. 这时插入操作终止, 而得到的 CSPP 就是 $P\leftarrow k$. 另一方面, 如果 r 存在, 则将 P_{1r} 替换成 k. 同时 k 将 $P_{1r}:=k'$ “冲击” 进入第二行, 即按照刚才描述的插入规则, 将 k' 插入到 P 的第二行, 有可能将一个新的元素 k'' 冲击进第三行. 继续下去直到有一个元素插入到某一行的末尾 (也可能为新的一行中的第一个元素). 最后得到

的数组就是 $P \leftarrow k$. 注意到以上规则完全类似于 NYT 的行插入: 对 NYT 的规则是一个元素冲击最左边的比它大的元素, 而对 CSPP 的规则是一个元素冲击最左边的比它小的元素.

8.15 例 设 P 为等式 (8.17) 所示的 CSPP. 将 6 行插入到 P 中. 被冲击的元素用黑体标出:

$$
\begin{array}{lllllll}
7 & 7 & \mathbf{4} & 3 & 3 & 3 & 1 \\
4 & \mathbf{3} & 3 & 1 \\
3 & \mathbf{2} \\
2 & \mathbf{1} \\
1
\end{array}
$$

最后被冲击的 1 插入到第 5 行的末尾. 因此

$$
(P \leftarrow 6) = \begin{array}{lllllll}
7 & 7 & 6 & 3 & 3 & 3 & 1 \\
4 & 4 & 3 & 1 \\
3 & 3 \\
2 & 2 \\
1 & 1
\end{array}
$$

我们现在可以描述平面分拆计数所需的类 RSK 算法. 我们不再是开始于一个置换 $\pi \in \mathfrak{S}_n$, 而是开始于一个 $r \times s$ 的非负整数矩阵 $A = (a_{ij})$, 简称为 $r \times s$ $\mathbb{N}$-矩阵. 然后将 A 转化为一个两行数组 (two-line array)

$$
w_A = \begin{pmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_N \\ v_1 & v_2 & \cdots & v_N \end{pmatrix},
$$

其中要求

- $u_1 \geqslant u_2 \geqslant \cdots \geqslant u_N$.
- 若 $i < j$ 且 $u_i = u_j$, 则 $v_i \geqslant v_j$.
- w_A 中等于 $\begin{smallmatrix} i \\ j \end{smallmatrix}$ 的列数为 a_{ij}. (故 $N = \sum a_{ij}$.)

容易看到 w_A 由 A 唯一确定, 反之亦然. 一个例子是, 假设

$$
A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{8.18}
$$

则

$$
w_A = \begin{pmatrix} 3 & 3 & 3 & 2 & 2 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 3 & 2 & 1 & 4 & 4 & 2 \end{pmatrix}.
$$

现在依次将 $v_1, v_2, \ldots, v_N$ 插入以得到一个 CSPP. 即开始于 $P_0 = \emptyset$ 并且归纳地定义 $P_i = P_{i-1} \leftarrow v_i$. 另外, 令 $Q_0 = \emptyset$, 在第 i 步将 u_i 插入到 Q_{i-1} (这过程没有任何的冲击以及对 Q_{i-1} 中元素的任何改变), 并使得 P_i 与 Q_i 有相同的形状. 最终令 $(P, Q) = (P_N, Q_N)$ 且记 $A \xrightarrow{\mathrm{RSK}'} (P, Q)$.

8.16 例 设 A 为等式 (8.18) 所示. $(P_1, Q_1), \ldots, (P_9, Q_9) = (P, Q)$ 如下:

P_i	Q_i
2	3
2 1	3 3
2 1 1	3 3 3
3 1 1 2	3 3 3 2
3 2 1 2 1	3 3 3 2 2
3 2 1 1 2 1	3 3 3 2 2 2
4 2 1 1 3 1 2	3 3 3 2 2 2 1
4 4 1 1 3 2 2 1	3 3 3 2 2 2 1 1
4 4 2 1 3 2 1 2 1	3 3 3 2 2 2 1 1 1

直接可证, 若 $A \xrightarrow{\mathrm{RSK}'} (P, Q)$, 则 P 和 Q 是相同形状的 CSPP. 我们省略以下这个关键引理的证明, 因为它与定理 8.13 的证明类似. 我们仅提及对应 $A \xrightarrow{\mathrm{RSK}'} (P, Q)$ 的一个从

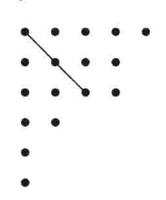
(P,Q) 恢复 A 的重要性质 (这容易证明), 即 Q 中相等元是从左至右插入的. 因此 Q 中最后一个放入的数为出现在最右边的最小元. 因此, 正如在普通 RSK 对应 $\pi \xrightarrow{\text{RSK}} (P,Q)$ 中所做的, 能反冲击 P 中相应位置的数以回到算法的上一步.

8.17 引理 对应关系 $A \xrightarrow{\text{RSK}'} (P,Q)$ 是非负整数的 $r \times s$ 矩阵的集合和具有相同形状的 CSPP 对 (P,Q) (P 的最大分量至多为 s, Q 的最大分量至多为 r) 的集合之间的一个双射.

下一步就是将相同形状的 CSPP 对 (P,Q) 转化到单个的平面分拆 π. 我们通过 "融合" P 的第 i 列与 Q 的第 i 列, 从而产生 π 的第 i 列. 因此我们首先描述如何将各分量互不相同的分拆 λ 和 μ(且它们具有相同分量数), 融合成一个分拆 $\rho = \rho(\lambda, \mu)$. 画出 λ 的 Ferrers 图, 但每一行首端都较上一行向右移动一个空格. 称这样的图为 λ 的移位 (shifted) Ferrers 图. 例如, 若 $\lambda = (5,3,2)$ 则它的移位图为

对 μ 同样操作, 并转置它的图. 例如, 若 $\mu = (6,3,1)$, 则它的转置移位图为

现在通过将两个图的主对角线重合在一起, 从而将它们融合成一个图. 对以上的 λ 和 μ, 可得下图 (为清楚起见, 将其主对角线画出):



定义 $\rho(\lambda, \mu)$ 为这种融合的 Ferrers 图所对应的分拆. 上面的例子说明

$$\rho(532, 631) = 544211.$$

映射 $(\lambda, \mu) \mapsto \rho(\lambda, \mu)$ 显然是具有 k 个不同分量的分拆对 (λ, μ) 与 (Ferrers 图的) 主对角线有 k 个点的分拆 ρ 之间的一个双射. 等价地, k 是使得 $\rho_j \geqslant j$ 的最大整数 j. 注意到

$$|\rho| = |\lambda| + |\mu| - \ell(\lambda). \tag{8.19}$$

我们现在将以上双射扩展到具有相同形状的 CSPP 对 (P,Q). 若 λ^i 表示 P 的第 i 列,

μ^i 表示 Q 的第 i 列, 则用 $\pi(P,Q)$ 表示第 i 列为 $\rho(\lambda^i,\mu^i)$ 的数组. 例如, 若

$$P = \begin{matrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 1 & \\ 2 & & & \end{matrix} \quad \text{和} \quad Q = \begin{matrix} 5 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 2 & 1 & \\ 1 & & & \end{matrix}$$

则

$$\pi(P,Q) = \begin{matrix} 4 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & & \\ 2 & & & \\ 2 & & & \end{matrix}$$

容易看到 $\pi(P,Q)$ 是一个平面分拆. 将 $\pi(P,Q)$ 的每一行替换为它的共轭以得到另一个平面分拆 $\pi'(P,Q)$. 对以上的 $\pi(P,Q)$ 我们有

$$\pi'(P,Q) = \begin{matrix} 4 & 3 & 2 & 2 \\ 4 & 3 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & & \\ 1 & 1 & & \end{matrix}$$

将 P 的元素和记为 $|P|$, 并记 $\max(P)$ 为 P 的最大元素, 对 Q 也类似. 当我们将 P 和 Q 融合成 $\pi(P,Q)$ 时, $\max(P)$ 就成了 $\pi(P,Q)$ 的最大分量. 因此当我们再取每行的共轭时, $\max(P)$ 就成了 $\pi'(P,Q)$ 的列数 $\mathrm{col}(\pi'(P,Q))$ [为什么]. 类似地, $\max(Q)$ 就成了 $\pi(P,Q)$ 和 $\pi'(P,Q)$ 的行数 $\mathrm{row}(\pi'(P,Q))$. 用符号来表示, 即为

$$\begin{aligned} \max P &= \mathrm{col}(\pi'(P,Q)), \\ \max Q &= \mathrm{row}(\pi'(P,Q)). \end{aligned} \tag{8.20}$$

进一步地, 从等式 (8.19) 可得

$$|\pi'(P,Q)| = |\pi(P,Q)| = |P| + |Q| - \nu(P), \tag{8.21}$$

其中 $\nu(P)$ 表示 P (或 Q) 的分量数.

现在所有的必要条件都已具备, 我们可以来证明本附录的主要结论了.

8.18 定理 设 $\mathrm{pp}_{rs}(n)$ 表示至多有 r 行和至多有 s 列的 n 的平面分拆数. 则

$$\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{pp}_{rs}(n)x^n=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}(1-x^{i+j-1})^{-1}.$$

证明 设 $A=(a_{ij})$ 为一个 $r\times s$ $\mathbb{N}$-矩阵. 我们可以结合以上讨论的这些双射来得到一个与 A 相关联的平面分拆 $\pi(A)$. 即首先应用 RSK 得到 $A\xrightarrow{\mathrm{RSK}'}(P,Q)$, 而后应用融合操作以及行共轭来得到 $\pi(A)=\pi'(P,Q)$. 因为两行数组 w_A 中的列 $\genfrac{}{}{0pt}{}{i}{j}$ 共出现 a_{ij} 次, 所以每次对 P 插入 j 且对 Q 插入 i. 故

$$\begin{aligned}|P|&=\sum_{i,j}ja_{ij},\\|Q|&=\sum_{i,j}ia_{ij},\\\max(P)&=\max\{j\colon a_{ij}\neq 0\},\\\max(Q)&=\max\{i\colon a_{ij}\neq 0\}.\end{aligned}$$

因此由等式 (8.20) 和 (8.21), 可知映射 $A\mapsto\pi(A)$ 是 $r\times s$ $\mathbb{N}$-矩阵 A 和至多有 r 行和至多有 s 列的平面分拆之间的一个双射. 进一步地, 有

$$\begin{aligned}|\pi(A)|&=|P|+|Q|-\nu(P)\\&=\sum_{i,j}(i+j-1)a_{ij}.\end{aligned}$$

因此对平面分拆的计数可化简为更为简单的对 $\mathbb{N}$-矩阵的计数. 具体来说, 有

$$\begin{aligned}\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{pp}_{rs}(n)x^n&=\sum_{\substack{\pi\\\mathrm{row}(\pi)\leqslant r\\\mathrm{col}(\pi)\leqslant s}}x^{|\pi|}\\&=\sum_{r\times s\ \mathbb{N}-\text{矩阵}\ A}x^{\sum(i+j-1)a_{ij}}\\&=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}\left(\sum_{a_{ij}\geqslant 0}x^{\sum(i+j-1)a_{ij}}\right)\\&=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{s}(1-x^{i+j-1})^{-1}.\end{aligned}$$

□

设 $\mathrm{pp}_r(n)$ 表示至多有 r 行的 n 的平面分拆数. 在定理 8.18 中令 $s\to\infty$ 而后令 $r\to\infty$, 可得如下推论, 它给出了两个优美的生成函数.

8.19 推论　我们有

$$\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{pp}_r(n)x^n=\prod_{i\geqslant 1}(1-x^i)^{-\min(i,r)}, \tag{8.22}$$

$$\sum_{n\geqslant 0}\mathrm{pp}(n)x^n=\prod_{i\geqslant 1}(1-x^i)^{-i}. \tag{8.23}$$

注　一旦读者见到了一维 (通常) 分拆的生成函数

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)(1-x^3)\cdots}$$

以及二维 (平面) 分拆的生成函数

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)^2(1-x^3)^3\ldots},$$

很自然地会问更高维分拆的情形. 特别地, n 的立体分拆 (solid partition) 是一个非负整数的三维数组 $\pi=(\pi_{ijk})_{i,j,k\geqslant 1}$, 三个坐标方向上的元素都是弱递减的, 且所有元素的和等于 n. 用 $\mathrm{sol}(n)$ 表示 n 的立体分拆数. 容易看到, 对任意的整数序列 $a_0=1$, a_1, $a_2,\ldots$, 存在唯一的整数序列 b_1, $b_2,\ldots$ 使得

$$\sum_{n\geqslant 0}a_nx^n=\prod_{i\geqslant 1}(1-x^i)^{-b_i}.$$

对 $a_n=\mathrm{sol}(n)$, 有

$$b_1=1,b_2=3,b_3=6,b_4=10,b_5=15,$$

这看起来很有希望. 但遗憾的是, 接下来的指数序列为

$$20,26,34,46,68,97,120,112,23,-186,-496,-735,-531,779,\ldots.$$

对立体分拆的计数问题仍然是一个公开问题, 并且它被认为是基本无望解决的.

第 8 章注记

P. A. MacMahon 最先计数了标准杨表 (SYT) [74, p. 175] (同样见 [75, §103]). MacMahon 用的是 “推广选举序列” 或 “格排列” 来得到了他的结果, 而不是 SYT, 但容易看出它们是等价的. 他表述的结果并不是定理 8.1 中钩长乘积的形式, 而是一个更复杂的乘积公式. 钩长形式的公式由 J. S. Frame 给出, 最早出现于 Frame, Robinson 和 R. M. Thrall 的文章

[38, Theorem 1] 中, 因此有时它被称为 “Frame-Robinson-Thrall 钩长公式”. (标准杨表的确切定义由 A. Young [122, p. 258] 给出.)

独立于 MacMahon 对型为 λ 的格排列的计数公式, F. G. Frobenius [41, Eq. (6)] 得到了一个相同的公式来计算 $\mathfrak{S}_n$ 的不可约特征 χ^λ 的次数. Frobenius 显然没有意识到 $\deg \chi^\lambda$ 的组合意义, 然而, Young 在 [122, pp. 260–261] 中证明了 $\deg \chi^\lambda$ 等于型为 λ 的 SYT 的数目, 从而给出 MacMahon 结果的一个独立证明. (Young 在 [122, Theorem. II] 中也给出了他自己关于 MacMahon 结果的证明.)

钩长公式的很多其他证明随后被发现. C. Greene, A. Nijenhuis 和 H. S. Wilf [48] 给出了一个优美的概率证明. A. Hillman 和 R. Grassl 的证明 [57] 清楚地说明了钩长的作用, 尽管这一证明并不是完全的双射. 而双射的版本之后由 C. F. Krattenthaler [64] 给出. 钩长公式最早的完全双射证明由 D. S. Franzblau 和 D. Zeilberger [39] 以及 J. B. Remmel [93] 分别给出. 之后 J. -C. Novelli, I. M. Pak 和 A. V. Stoyanovskii [80] 给出了一个相当优美的双射证明.

S. Fomin [36][37] 和 R. Stanley [104][106] 各自独立地, 在一个更广的领域, 最先将算子 U 和 D 应用在了杨格的 Hasse 图的计数上. 同样可见一个简短的阐述 [107, §3.21].

RSK 算法(也有很多其他的名字, 但都用的是 “对应” 或 “算法” 再结合上 Robinson, Schensted 和 Knuth 的名字的某一子集合) 首先由 G. de B. Robinson [94, §5] 给出了一个相当含糊的描述, 当时它被用作一个工具, 来尝试性地证明一个现在称为 “Littlewood-Richardson 定律” 的结果. RSK 算法之后被 C. E. Schensted (见下文) 重新发现, 但在 M. van Leeuwen [120, §7] 之前, 一直没有人真正分析过 Robinson 的工作. 一个很有意思的事情是, Robinson 在 754 页的一个脚注上写道 “我得感谢 Mr. D. E. Littlewood, 是他构造的关联 I”. Van Leeuwen 的分析将 “关联 I” 说清楚了, 它指的是 RSK 算法 $\pi \xrightarrow{\text{RSK}} (P, Q)$ 中得到记录表 Q 的方法. 因此, 一个准确的说法应该是, 若 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 且 $\pi \xrightarrow{\text{RSK}} (P, Q)$, 则 P 的定义由 Robinson 给出, 而 Q 的定义由 Littlewood 给出.

1961 年 Schensted 发表他的开创性论文 [97] 之前, 一直没有关于 Robinson 构造的更深入的工作. (若要了解一些 Schensted 的不平凡生活, 见 [5].) Schensted 的目的是根据 $\mathfrak{S}_n$ 中置换的最长递增和递减子序列的长度对置换计数. 虽然我们在上文中提到, 最早具体描述 Robinson 的工作与 Schensted 的工作之间联系的人是 van Leeuwen, 但根据 Knuth [65, p. 726], 这一联系最早其实是由 M. -P. Schützenberger 指出的.

MacMahon 在一系列的文章中发现并研究了平面分拆, 但直到很久之后这些工作才受到重视. (MacMahon 的著作 [75, Sections IX and X] 中有他结果的详细阐述.) MacMahon 第一篇处理平面分拆的文章见文集 [73]. 他在这一文集的 Article 43 中给出了平面分拆 (虽

然不是这个名字) 的定义. 在 Article 51 中, 他猜测平面分拆的生成函数为如下这个乘积式

$$(1-x)^{-1}(1-x^2)^{-2}(1-x^3)^{-3}(1-x^4)^{-4}\cdots$$

(即本书中的等式 (8.23)). 在 Article 52 中, 他猜测了本书中的等式 (8.22) 以及定理 8.18, 并最终得到了一个巅峰猜想——至多有 r 行和至多有 s 列且最大分量至多为 t 的 n 的平面分拆的生成函数. (见练习 8.34.) 而后, MacMahon 在 Articles 56–62 中证明了他的平面分拆猜想中至多有 2 行和至多有 s 列的情形 (本书中定理 8.18 当 $r=2$ 的情形), 并在第 662 页提到, A. R. Forsyth 也独立地得到了这个结果. (虽然他在参考文献中给出了 Forsyth 已发表的文章, 但事实上这一文章并不存在.)

MacMahon 关于平面分拆的巅峰工作见 [75, Art. 495], 在这篇文章中他证明了他关于平面分拆的第一篇文章 [73] 以来的最主要猜想, 即练习 8.34, 除此之外, 我们并不准备描述 MacMahon 关于平面分拆的随后工作. 但是 MacMahon 的证明非常冗长且不直接.

1972 年 E. A. Bender 和 D. E. Knuth [6] 给出了对称函数理论与平面分拆计数之间的联系. 基于 RSK 算法, 他们给出了平面分拆领域里很多结果的简单证明, 这其中就有定理 8.18 的第一个双射证明 (即我们给出的证明).

关于杨表以及与之相关的对称函数、对称群表示论、Grassmann 簇等方面的进一步发展, 见 W. E. Fulton [42], B. E. Sagan [96] 以及 R. Stanley [108, Ch. 7].

第 8 章练习

1. 画出形状为 $(4,2)$ 的所有标准杨表.
2. 利用钩长公式, 证明形状为 (n,n) 的 SYT 数为 Catalan 数 $C_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$.
3. 在偏序集 $L(4,4)$ 中有多少条极大链, 其中 $L(m,n)$ 的定义见第 6 章? 将答案表示成整数的乘积和商的形式 (非和式).
4. 分拆 λ 的转角方块 (corner square) 是 λ 的杨图中满足如下条件的方块: 将该方块移除后可得到另一个分拆的杨图 (与之前的杨图具有相同的左上角). 用 $c(\lambda)$ 表示分拆 λ 的转角方块数 (或不同分量数). 例如, $c(5,5,4,2,2,2,1,1)=4$. (不同的分量为 $5,4,2,1$.) 证明

$$\sum_{\lambda\vdash n}c(\lambda)=p(0)+p(1)+\cdots+p(n-1),$$

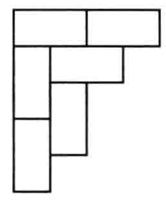
其中 $p(i)$ 表示 i 的分拆数 (取 $p(0)=1$). 试着给出一个优美的组合证明.

5. 证明分拆 λ 的奇长钩数与偶长钩数之差为一个三角数 (形如 $k(k+1)/2$ 的数).
6. (比较困难) 证明具有 n 个方块且至多有两行的 SYT 数为 $\binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}$. 等价地,

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2\rfloor} f^{(n-i,i)} = \binom{n}{\lfloor n/2\rfloor}.$$

试着给出一个优美的组合证明.

7. (困难) (*) 设 $f(n)$ 为 $2n$ 的分拆 λ 的数目, 其中要求 λ 的杨图能被 n 个不重叠的多米诺骨牌覆盖 (即具有一条公共边的两个方块). 例如, 下图给出了分拆 43221 的一个多米诺骨牌覆盖.



设

$$F(x) = \sum_{n\geqslant 0} f(n)x^n = 1 + 2x + 5x^2 + 10x^3 + 20x^4 + 36x^5 + \cdots.$$

证明

$$F(x) = \prod_{n\geqslant 1}(1-x^n)^{-2}.$$

8. (困难) 设 λ 为一个分拆. 用 $m_k(\lambda)$ 表示 λ 中等于 k 的分量数, 用 $\eta_k(\lambda)$ 表示 λ 中长为 k 的钩的数目. 证明

$$\sum_{\lambda\vdash n} \eta_k(\lambda) = k \sum_{\lambda\vdash n} m_k(\lambda).$$

9. (比较困难) 设 μ 为一个分拆, A_μ 为从象限 $Q = \{(i,j) : i < 0,\ j > 0\}$ 的左下角中去除形状 μ 后所得的一个无限形状. 因此 A_μ 的每一个方块都具有有限的钩和钩长. 例如, 当 $\mu = (3,1)$ 时, 可得下图

⋮

···					
10	9	8	6	5	3
9	8	7	5	4	2
8	7	6	4	3	1
6	5	4	2	1	
3	2	1			

证明 A_μ 的钩长构成的重集等于 Q 的钩长重集 (具体为 $\{1^1, 2^2, 3^3, \ldots\}$) 与 μ 的钩长重集的并.

10. 如下操作一共有多少种方法: 开始于空分拆 $\emptyset$, 然后每次添加一个方块 (保持是一个分拆) 至 $2n$ 个方块, 接着每次删除一个方块至 n 个方块, 再每次添加一个方块至 $2n$ 个方块, 最终每次删除一个方块 (共 $2n$ 次) 至 $\emptyset$?
11. (困难) 固定 n. 证明满足 f^λ 为奇数的分拆 $\lambda \vdash n$ 的数目等于 $2^{k_1+k_2+\cdots}$, 其中 $k_1 < k_2 < \cdots$ 且 $n = 2^{k_1} + 2^{k_2} + \cdots$ (n 的一个二进制表示). 例如, $75 = 2^0 + 2^1 + 2^3 + 2^6$, 故使得 f^λ 为奇数的 75 的分拆 λ 分拆的数目等于 $2^{6+3+1+0} = 1024$.
12. 设 U 和 D 为与杨格关联 (本章定义) 的线性变换. 将 D^2U^2 以及 D^3U^3 写成 $\sum a_{ij}U^iD^j$ 的形式.
13. 设 U 和 D 为与杨格关联的线性变换. 假设 f 是某个关于 U 和 D (非交换) 的多项式, 并满足 $f(U,D) = 0$, 比如, $f(U,D) = DU - UD - I$. 设 $i = \sqrt{-1}$. 证明 $f(iD, iU) = 0$.
14. (*) 证明

$$U^nD^n = \big(UD - (n-1)I\big)\big(UD - (n-2)I\big)\cdots(UD - I)UD, \tag{8.24}$$

其中, U 和 D 为与杨格关联的线性变换 (I 是恒等变换), 且 (8.24) 的两边作用在向量空间 $\mathbb{R}Y_j$ (对某一固定的 j) 上.

15. (困难) 给出推论 8.8 的一个双射证明, 即 $\beta(2m, \emptyset) = 1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)$. 证明应该用到类似 RSK 的一个算法. 首先, 注意到 [为什么] $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2m-1)$ 等于 $[2m]$ 上**完美匹配** (complete matchings) 的数目, 即顶点集为 $[2m]$ 且具有 m 条边的图的个数, 其中要求每个顶点只与唯一的一条边相连.
16. 固定一个分拆 $\lambda \vdash n-1$. 给出和式 $t(\lambda) = \sum_{\mu \gtrdot \lambda} f^\mu$ 用 f^λ 表示的一个简单公式. 和式遍历杨格 Y 中所有覆盖 λ 的分拆 μ (即 $\mu > \lambda$ 且它们之间没有元素, 因此 $\mu \vdash n$). 给出利用线性代数的一个简单证明, 而非组合证明.
17. (a) (*) 定义 Bell 数 $B(n)$ 为一个 n 元集合 S 的划分数, 即集合 $\{B_1, \ldots, B_k\}$ 的数目, 其中 $B_i \neq \emptyset$, 若 $i \neq j$ 则 $B_i \cap B_j = \emptyset$, 并且 $\bigcup B_i = S$. 求如下生成函数的一个简单公式

$$F(x) = \sum_{n \geqslant 0} B(n)\frac{x^n}{n!} = 1 + x + 2\frac{x^2}{2!} + 5\frac{x^3}{3!} + 15\frac{x^4}{4!} + \cdots.$$

    (b) (比较困难) 设 $f(n)$ 为通过 n 步从空分拆 $\emptyset$ 移动到 $\emptyset$ 的方法数, 其中每一步可以为: (i) 对杨图添加一个方块, (ii) 移除一个方块, 或者 (iii) 添加然后移除一个方块, 总保持图为一个分拆 (甚至在 (iii) 的中间步骤). 例如, $f(3) = 5$, 对应的五个

序列为

$$\begin{array}{cccc} \emptyset\ (1,\emptyset) & (1,\emptyset) & (1,\emptyset) \\ \emptyset\ (1,\emptyset) & 1 & \emptyset \\ \emptyset\quad 1 & (2,1) & \emptyset \\ \emptyset\quad 1 & (11,1) & \emptyset \\ \emptyset\quad 1 & \emptyset & (1,\emptyset) \end{array}.$$

得到 (并证明) $f(n)$ 以 Bell 数表示的一个公式.

18. (困难) (*) 对 $n,k\geqslant 0$, 用 $\kappa(n\to n+k\to n)$ 表示在 Y 中开始于第 n 层水平, 向上走 k 步到达第 $n+k$ 层, 然后向下走 k 步回到第 n 层的闭 (closed) 游动数. 因此比如说 $\kappa(n\to n+1\to n)$ 就是水平 n 与 $n+1$ 之间的覆盖关系数. 证明

$$\sum_{n\geqslant 0}\kappa(n\to n+k\to n)q^n = k!\,(1-q)^{-k}F(Y,q).$$

这里 $F(Y,q)$ 是 Y 的秩生成函数, 由命题 8.14 (取 $s\to\infty$) 可得

$$F(Y,q)=\prod_{i\geqslant 1}(1-q^i)^{-1}.$$

19. 设 X 表示杨格 Y 的所有元素的形式和. 算子 U 和 D 以通常的方式作用在 X 上, 从而产生了 Y 中元素的无限线性组合. 例如, 在 DX 中分拆 $(3,1)$ 前的系数为 3, 这是将 D 作用于 $(4,1)$, $(3,2)$ 以及 $(3,1,1)$ 所得.
   (a) 证明 $DX=(U+I)X$, 其中 I 表示恒等线性变换.
   (b) 将 D^nX 中 $\emptyset$ (空分拆) 前的系数 s_n 用 f^λ $(\lambda\vdash n)$ 表示. (例如, $s_0=s_1=1, s_2=2, s_3=4.$)
   (c) 证明

$$D^{n+1}X=(UD^n+D^n+nD^{n-1})X,\quad n\geqslant 0,$$

   其中取 $D^{-1}=0$, $D^0=I$.
   (d) 找出 s_n 满足的一个简单递归关系.
   (e) 求如下生成函数的一个简单公式:

$$F(x)=\sum_{n\geqslant 0}s_n\frac{x^n}{n!}.$$

   (f) 证明 s_n 是 $\mathfrak{S}_n$ 中对合的个数, 即满足 $\pi^2=\iota$ 的元素 $\pi\in\mathfrak{S}_n$ 的个数.
   (g) (相当困难) 证明若 $\pi\in\mathfrak{S}_n$ 且 $\pi\xrightarrow{\text{RSK}}(P,Q)$, 则 $\pi^{-1}\xrightarrow{\text{RSK}}(Q,P)$.
   (h) 从 (g) 推导出 (f).

20. (a) 考虑线性变换 $U_{n-1}D_n\colon \mathbb{R}Y_n \to \mathbb{R}Y_n$. 证明它的特征值是重数为 $p(n-i)-p(n-i-1)$ 的整数 i, 其中 $0 \leqslant i \leqslant n-2$ 和 $i=n$.
    (b) (*) 利用 (a) 给出定理 8.9 的另一个证明.
21. (a) (比较困难) 设 $Y_{[j-2,j]}$ 表示将杨格 Y 限制到水平 $j-2, j-1, j$ 上时对应的 Hasse 图. 用 $p(n)$ 表示 n 的分拆数, 并记 $\Delta p(n) = p(n) - p(n-1)$. 证明图 $Y_{[j-2,j]}$ 的邻接矩阵的特征多项式为

$$\pm x^{\Delta p(j)}(x^2-1)^{\Delta p(j-1)} \prod_{s=2}^{j} (x^3-(2s-1)x)^{\Delta p(j-1)},$$

其中的符号为 $(-1)^{\#Y_{[j-2,j]}} = (-1)^{p(j-2)+p(j-1)+p(j)}$.
    (b) (困难) 对任意的 $i \geqslant 0$, 将以上结论推广至 $Y_{[j-i,j]}$. 将答案表示成如下形式的矩阵的特征多项式.

$$\begin{bmatrix} 0 & a & 0 & & & 0 & 0 \\ 1 & 0 & a+1 & & & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & & \ddots & 0 & 0 \\ & & & \ddots & & & \\ & & \ddots & & & 0 & b \\ & & & & & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

22. (比较困难)
    (a) 设 U 和 D 为满足 $DU - UD = I$ 的算子 (或仅为非交换的变元). 证明对任意的幂级数 $f(U) = \sum a_n U^n$, 其中系数 a_n 为实数, 我们有

$$\mathrm{e}^{Dt} f(U) = f(U+t)\mathrm{e}^{Dt}.$$

特别地,

$$\mathrm{e}^{Dt}\mathrm{e}^{U} = \mathrm{e}^{t+U}\mathrm{e}^{Dt}. \tag{8.25}$$

这里的 t 是一个与 U 和 D 都可交换的变元 (不定元). 将等式两边都视为关于 t 的幂级数, 且其系数为关于 U 和 D (非交换) 的多项式. 例如,

$$\begin{aligned} \mathrm{e}^{Dt}\mathrm{e}^{U} &= \left(\sum_{m\geqslant 0} \frac{D^n t^n}{n!}\right)\left(\sum_{n\geqslant 0} \frac{U^n}{n!}\right) \\ &= \sum_{m,n\geqslant 0} \frac{D^m U^n t^m}{m!\,n!}. \end{aligned}$$

    (b) 证明 $\mathrm{e}^{(U+D)t} = \mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2+Ut}\mathrm{e}^{Dt}$.

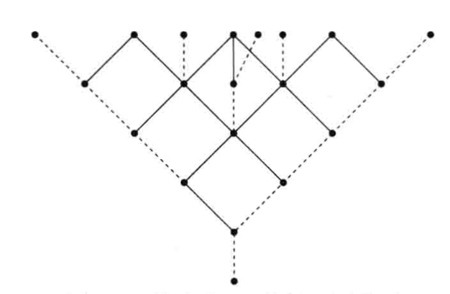


图 8.1　偏序集 Z 的前五层水平

23. 设 w 是关于 U 和 D 的一个平衡 (balanced) 字, 即 U 和 D 的数目相等. 例如, $UUDUDDDU$ 为一个平衡字. 将 U 和 D 视为 $\mathbb{R}Y$ 上的通常线性变换. 因此平衡字将空间 $\mathbb{R}Y_n$ 映射到它本身, 其中 Y_n 为杨格 Y 中的第 n 层水平. 证明 $E_n = \sum_{\lambda\vdash n} f^\lambda\lambda \in \mathbb{R}Y_n$ 是 w 的一个特征向量, 并求它所对应的特征值.
24. (*) 证明任意两个平衡字可换 (如上一个练习中所定义).
25. 递归定义一个分次偏序集 Z 如下. 最底层水平 Z_0 由一个元素组成. 假设我们已经构造好了前 n 层水平. 首先将 Z_{n-1} 通过 Z_n 做 "反射". 更具体地, 对每一个元素 $x \in Z_{n-1}$, 令 x' 为 Z_{n+1} 的一个新元素, 满足 $x' \gtrdot y$ (其中 $y \in Z_n$) 当且仅当 $y \gtrdot x$. 而后对每一个 $y \in Z_n$, 令 y' 为 Z_{n+1} 中覆盖 y 的一个新元素 (并且不覆盖 Z_n 中的任何其他元素). 图 8.1 给出了前五层水平的偏序集 Z. 图中由反射所得的覆盖关系用实线画出, 而形如 $y' \gtrdot y$ 的关系用虚线表示.
    (a) 证明 $\#Z_n = F_{n+1}$ (Fibonacci 数), 因此 Z 的秩生成函数为
    $$F(Z,q) = \frac{1}{1-q-q^2}.$$
    (b) $U_i\colon \mathbb{R}Z_i \to \mathbb{R}Z_{i+1}$ 和 $D_i\colon \mathbb{R}Z_i \to \mathbb{R}Z_{i-1}$ 的定义与作用在 Y 上的算子完全一样, 即对 $x \in Z_i$ 有
    $$U_i(x) = \sum_{y \gtrdot x} y,$$
    $$D_i(x) = \sum_{y \lessdot x} y.$$
    证明 $D_{i+1}U_i - U_{i-1}D_i = I_i$. 因此, 在 Y 上基于这个交换关系的所有结果, 对 Z 也都成立!(对包含 $p(n)$ 的结论, 我们仅需将 $p(n)$ 替换成 F_{n+1} 即可.)
26. (a) 假设 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 且 $\pi \xrightarrow{\text{RSK}} (P,Q)$. 设 $f(\pi)$ 为使得 $1,2,\ldots,k$ 都出现在 P 的第一行的最大整数 k. 求满足 $f(\pi)=k$ 的置换 $\pi \in \mathfrak{S}_n$ 的个数的一个简单公式.

(b) 对 $\pi \in \mathfrak{S}_n$, 用 $E(n)$ 表示 $f(\pi)$ 的期望值, 即

$$E(n) = \frac{1}{n!} \sum_{\pi \in \mathfrak{S}_n} f(\pi).$$

求 $\lim_{n\to\infty} E(n)$.

27. (a) 置换 $a_1a_2\cdots a_n \in \mathfrak{S}_n$ 的递增子序列 (increasing subsequence) 为使得 $a_{i_1} < a_{i_2} < \cdots < a_{i_j}$ 的一个子序列 $a_{i_1}a_{i_2}\cdots a_{i_j}$. 例如, 2367 是置换 52386417 的一个递增子序列. 假设通过 RSK 算法, 置换 $w \in \mathfrak{S}_n$ 映射到了形状为 $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ 的 SYT. 证明 λ_1 是 w 的最长递增子序列的长度.
   (b) (更困难) 类似递增子序列, 可以定义递减子序列 (decreasing subsequence). 证明 λ_1' (λ 的分量数) 等于 λ 的最长递减子序列的长度.
   (c) 若 (a) 和 (b) 都成立, 证明对 $m, n \geqslant 1$, 置换 $w \in \mathfrak{S}_{mn+1}$ 具有一个长度为 $m+1$ 的递增子序列或一个长度为 $n+1$ 的递减子序列.
   (d) 有多少置换 $w \in \mathfrak{S}_{mn}$ 具有长度为 m 的最长递增子序列和长度为 n 的最长递减子序列? (利用钩长公式来得到一个简单的答案.)
28. 写出 4 的 13 个平面分拆以及 5 的 24 个平面分拆.
29. 证明引理 8.17 前的那个陈述, 即在双射 $A \xrightarrow{\text{RSK}'} (P, Q)$ 中, Q 的相等元是从左至右插入的.
30. 设 A 为 $r \times s$ 的全 1 矩阵. 描述平面分拆 $\pi'(A)$.
31. (a) 求使得下面条件成立的 $\mathbb{N}$-矩阵 A:

$$\pi'(A) = \begin{matrix} 6 & 4 & 4 & 3 & 3 \\ 5 & 3 & 3 & 2 & \\ 3 & 2 & 1 & & \end{matrix}$$

   (b) A 中的非零元传达了什么信息?
32. (a) (非常困难) 设 A 为一个 $r \times s$ $\mathbb{N}$-矩阵, 且 $A \xrightarrow{\text{RSK}'} (P, Q)$. 若 A^t 表示 A 的转置, 则证明 $A^t \xrightarrow{\text{RSK}'} (Q, P)$.

   注 从头开始证明这一结果会非常困难. 若读者能解决练习 8.19(g), 则通过一个简单的修改, 这一结果即可得证. 事实上, 有可能直接从练习 8.19(g) 推导出本结果.
   (b) 若对所有的 i 和 j 有 $\pi_{ij} = \pi_{ji}$, 则称平面分拆 $\pi = (\pi_{ij})$ 是对称的 (symmetric). 用 $s_r(n)$ 表示至多有 r 行的 n 的对称平面分拆数. 假设 (a) 成立, 证明

$$\sum_{n\geqslant 0} s_r(n)x^n = \prod_{i=1}^{r} \left(1 - x^{2i-1}\right)^{-1} \cdot \prod_{1\leqslant i<j\leqslant r} \left(1 - x^{2(i+j-1)}\right)^{-1}.$$

(c) 设 $s(n)$ 表示 n 的对称平面分拆数. 在 (b) 中令 $r \to \infty$ 推导

$$\sum_{n \geqslant 0} s(n) x^n = \prod_{i \geqslant 1} \frac{1}{(1-x^{2i-1})(1-x^{2i})^{\lfloor i/2 \rfloor}}.$$

(d) (很困难; 不能通过 RSK 算法解决) 设 $s_{rt}(n)$ 表示至多有 r 行, 最大分量最多为 t 的对 n 的对称平面分拆数. 证明

$$\sum_{n \geqslant 0} s_{rt}(n) x^n = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant r} \prod_{k=1}^{t} \frac{1-x^{(2-\delta_{ij})(i+j+k-1)}}{1-x^{(2-\delta_{ij})(i+j+k-2)}}.$$

33. 平面分拆 $\pi = (\pi_{ij})$ 的迹 (trace) 定义为 $\operatorname{tr}(\pi) = \sum_i \pi_{ii}$. 设 $\operatorname{pp}(n,k)$ 表示迹为 k 的 n 的平面分拆数. 证明

$$\sum_{n \geqslant 0} \sum_{k \geqslant 0} \operatorname{pp}(n,k) q^k x^n = \prod_{i \geqslant 1} (1-qx^i)^{-i}.$$

34. (很困难; 不能通过 RSK 算法解决) 设 $\operatorname{pp}_{rst}(n)$ 表示至多有 r 行, 至多有 s 列, 且最大分量至多为 t 的对 n 的平面分拆数. 证明

$$\sum_{n \geqslant 0} \operatorname{pp}_{rst}(n) x^n = \prod_{i=1}^{r} \prod_{j=1}^{s} \prod_{k=1}^{t} \frac{1-x^{i+j+k-1}}{1-x^{i+j+k-2}}.$$

35. 设 $f(n)$ 表示最大分量至多为 1 的 n 的立体分拆数. 求出其生成函数

$$F(x) = \sum_{n \geqslant 0} f(n) x^n.$$

第 9 章　矩阵树定理

矩阵树定理是用某个矩阵的行列式来表示一个图的生成树个数的公式. 我们先介绍必要的图论背景知识. 设 G 是有限图, 允许重边但不允许自环. (可以允许自环, 但与我们展开的讨论完全无关.) 如果 G 中任意两点之间都有一条游动, 那么称 G 是连通的 (connected). 圈 (cycle) 是一个除开头和结尾顶点外没有重复顶点或边的闭游动. 树 (tree) 是一个无圈连通图. 特别地, 因为一个双边等价于一个长度为 2 的圈, 所以树不能有重边. 图 9.1 展示了有 5 个顶点的 3 棵不同构树.

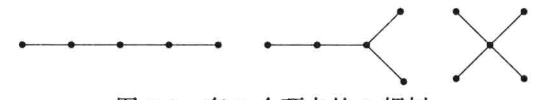


图 9.1　有 5 个顶点的 3 棵树

图论中的一个基本定理 (其简单证明留作练习) 如下.

9.1 命题　设 G 是有 p 个顶点的图. 下面的条件等价.

(a) G 是一棵树.

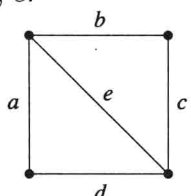
(b) G 是连通的且有 $p-1$ 条边.

(c) G 不包含圈且有 $p-1$ 条边.

(d) 任意两顶点之间有唯一的路 (= 没有重复顶点的游动).

图 G 的生成子图 (spanning subgraph) 是与 G 有相同顶点集的图 H, 并且满足 H 的边都是 G 的边. 如果 G 有 q 条边, 那么 G 的生成子图的个数就等于 2^q, 因为我们可以取 G 的边集的任意子集作为 H 的边集. (注意相同两顶点之间的重边被认为是可区分的 (distinguishable), 与第 1 章中图的定义一致.) 本身是树的生成子图称为生成树 (spanning tree). 显然 G 有生成树当且仅当它是连通的 [为什么]. 图 G 的一个重要不变量就是它的生成树的个数, 称为图 G 的复杂度 (complexity) 并记为 $\kappa(G)$.

9.2 例　设 G 为下图, 有边 a, b, c, d, e.



则 G 有 8 个生成树, 即 abc, abd, acd, bcd, abe, ace, bde, cde (其中, 例如 abc 表示具有边集 $\{a,b,c\}$ 的生成子图).

9.3 例　设 $G=K_5$, 是 5 个顶点的完全图. 一个简单的计数可以说明 K_5 有 60 个生成树与图 9.1中第一个树同构, 60 个与第二个树同构, 还有 5 个与第三个树同构. 故 $\kappa(K_5)=125$. 很容易验证 $\kappa(K_1)=1$, $\kappa(K_2)=1$, $\kappa(K_3)=3$, $\kappa(K_4)=16$. 读者可以对任意 $p\geqslant 1$ 猜想 $\kappa(K_p)$ 的值吗?

我们的目标是得到 $\kappa(G)$ 的"行列式公式". 为此我们需要矩阵理论中的一个重要结果, 名之为 Binet-Cauchy 定理或 Cauchy-Binet 定理. 该定理在线性代数入门的课程中往往被省略. 后面 (定理 10.4) 我们将证明一个更一般的行列式公式, 而不借助 Binet-Cauchy 定理. 但是 Binet-Cauchy 定理的使用确实提供了一些额外的代数洞察力. Binet-Cauchy 定理推广了我们熟悉的事实, 即如果 A 和 B 是 $n\times n$ 矩阵, 那么 $\det AB=(\det A)(\det B)$, 其中 det 表示取行列式. 我们希望拓展该公式到 A 和 B 是长方形矩阵的情形, 但要求其乘积是方阵 (从而 $\det AB$ 有定义). 换句话说, 对某些 $m,n\geqslant 1$, A 是 $m\times n$ 矩阵且 B 是 $n\times m$ 矩阵.

我们将使用下面关于子矩阵的记号. 假设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵, 且有 $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant j\leqslant n$ 和 $m\leqslant n$. 给定 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的 m 元子集 S, 令 $A[S]$ 表示从矩阵 A 中取出 S 的元素标记的列所构成的 $m\times m$ 子矩阵. 换句话说, 如果 S 的元素是 $j_1<j_2<\cdots<j_m$, 那么 $A[S]=(a_{i,j_k})$, 其中 $1\leqslant i\leqslant m$, $1\leqslant k\leqslant m$. 例如, 若

$$A=\begin{bmatrix}1&2&3&4&5\\6&7&8&9&10\\11&12&13&14&15\end{bmatrix}$$

和 $S=\{2,3,5\}$, 则

$$A[S]=\begin{bmatrix}2&3&5\\7&8&10\\12&13&15\end{bmatrix}.$$

类似地, 令 $B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵, 且 $1\leqslant i\leqslant n$, $1\leqslant j\leqslant m$ 和 $m\leqslant n$. 如上令 S 是 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的 m 元子集. 则 $B[S]$ 表示通过取 B 的以 S 为标记的行所得的 $m\times m$ 矩阵. 注意到 $A^t[S]=A[S]^t$, 其中 ^{t} 表示转置.

9.4 定理 (Binet-Cauchy 定理)　设 $A=(a_{ij})$ 是 $m\times n$ 矩阵, 且 $1\leqslant i\leqslant m$ 和 $1\leqslant j\leqslant n$. 设 $B=(b_{ij})$ 是 $n\times m$ 矩阵, 且 $1\leqslant i\leqslant n$ 和 $1\leqslant j\leqslant m$. (于是 AB 是 $m\times m$ 矩阵.) 如果 $m>n$, 那么 $\det(AB)=0$. 如果 $m\leqslant n$, 那么

$$\det(AB)=\sum_S(\det A[S])(\det B[S]),$$

其中 S 遍历 $\{1,2,\ldots,n\}$ 的所有 m 元子集.

在进行证明之前, 先看一个例子. 记 $|a_{ij}|$ 为矩阵 (a_{ij}) 的行列式. 假设

$$A=\begin{bmatrix}a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\end{bmatrix},\quad B=\begin{bmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\\ c_3 & d_3\end{bmatrix}.$$

则

$$\det AB=\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c_1 & d_1\\ c_2 & d_2\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_1 & a_3\\ b_1 & b_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c_1 & d_1\\ c_3 & d_3\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a_2 & a_3\\ b_2 & b_3\end{vmatrix}\cdot\begin{vmatrix}c_2 & d_2\\ c_3 & d_3\end{vmatrix}.$$

定理 9.4 的证明 (概略)　首先假设 $m>n$. 因为从线性代数可知 $\operatorname{rank}AB\leqslant\operatorname{rank}A$ 且 $m\times n$ 矩阵的秩不超过 n (或 m), 所以 $\operatorname{rank}AB\leqslant n<m$. 但 AB 是 $m\times m$ 矩阵, 故 $\det AB=0$, 即为所证.

现在假设 $m\leqslant n$. 我们用如 M_{rs} 的记号来表示 $r\times s$ 矩阵 M. 由矩阵乘法定义即得 (读者应自行检验)

$$\begin{bmatrix}R_{mm} & S_{mn}\\ T_{nm} & U_{nn}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}V_{mn} & W_{mm}\\ X_{nn} & Y_{nm}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}RV+SX & RW+SY\\ TV+UX & TW+UY\end{bmatrix}. \tag{9.1}$$

换句话说, 我们可以对适当“分块”的矩阵做乘积运算, 结果与这些块是数的情形相同. 注意到等式 (9.1) 右边的元都有良好定义的尺寸 (大小), 例如, 因为 RV 和 SX 都是 $m\times n$ 矩阵, 所以 $RV+SX$ 也是 $m\times n$ 矩阵.

现在在等式 (9.1) 中令 $R=I_m$ ($m\times m$ 恒等矩阵), $S=A$, $T=O_{nm}$ ($n\times m$ 的全 0 矩阵), $U=I_n$, $V=A$, $W=O_{mm}$, $X=-I_n$, 以及 $Y=B$. 可得

$$\begin{bmatrix}I_m & A\\ O_{nm} & I_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}A & O_{mm}\\ -I_n & B\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}O_{mn} & AB\\ -I_n & B\end{bmatrix}. \tag{9.2}$$

在等式 (9.2) 两边取行列式. 左边第一个矩阵是主对角线全 1 的上三角阵, 故其行列式为 1. 因为方阵乘积的行列式是其因子的行列式的乘积, 所以有

$$\begin{vmatrix}A & O_{mm}\\ -I_n & B\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}O_{mn} & AB\\ -I_n & B\end{vmatrix}. \tag{9.3}$$

易知 [为什么] 等式 (9.3) 右边的行列式等于 $\pm\det AB$. 故考虑左边. 在左边行列式的展开式中, 每个非零项都是 (带特定符号的) $m+n$ 个不同行不同列的非零元的乘积 (故每行每列取一个元). 特别地, 我们必须从最后 m 列中取 m 个元. 这些元属于底部 n 行中的 m 行

[为什么], 比如说第 $m+s_1, m+s_2, \ldots, m+s_m$ 行. 设 $S=\{s_1,s_2,\ldots,s_m\}\subseteq\{1,2,\ldots,n\}$. 我们必须从最后的 n 行中再选 $n-m$ 个元, 而且我们只能选那些 $m+i$ 行中的 -1, 其中要求 $i\notin S$. 于是等式 (9.3) 左边展开式中的每一项都恰好用了 $n-m$ 个在底部左边的块 $-I_n$ 中的 -1.

在等式 (9.3) 左边的展开式中, 那些恰好用了 $m+i$ 行 (其中 $i\notin S$) 中 -1 的项的贡献是什么呢? 我们可以通过删除那些包含这些 -1 的所有行和列 (换言之, 对所有 $i\in\{1,2,\ldots,n\}-S$ 删除第 $m+i$ 行和第 i 列), 对剩下的 $2m\times 2m$ 矩阵 M_S 取行列式, 并乘以适当的符号来得到 [为什么]. 但矩阵 M_S 是对角分块矩阵, 其第一个块就是矩阵 $A[S]$, 而第二个块就是 $B[S]$. 因此 $\det M_S=(\det A[S])(\det B[S])$ [为什么]. 取遍所有可能的子集 S 即得

$$\det AB=\sum_{\substack{S\subseteq\{1,2,\ldots,n\}\\|S|=m}}\pm(\det A[S])(\det B[S]).$$

可以直接验证所有的符号都是 $+$, 但有些繁琐, 此处省略细节. 证毕. □

在第 1 章我们定义了图 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G)$, 其中顶点集为 $V=\{v_1,\ldots,v_p\}$, 边集为 $E=\{e_1,\ldots,e_q\}$. 现在定义两个相关矩阵. 继续假设 G 没有自环. (因为自环不影响 $\kappa(G)$, 所以这个假设是无损的.)

9.5 定义　设 G 如上. 给 G 一个定向 (orientation) $\mathfrak{o}$, 即对每个具有端点 u,v 的边 e, 选择一个有序对 (u,v) 或 (v,u). 比如说如果选择了 (u,v), 那么就想象在 e 上放一个从 u 指向 v 的箭头; 并称 e 是从 u 到 v 定向, u 是 e 的起始顶点 (initial vertex), v 是终止顶点 (final vertex), 等等.

(a) 图 G (相对于定向 $\mathfrak{o}$) 的关联矩阵 (incidence matrix) $\boldsymbol{M}(G)$ 是 $p\times q$ 矩阵, 其 (i,j)-元 $\boldsymbol{M}_{ij}$ 如下

$$\boldsymbol{M}_{ij}=\begin{cases}-1, & \text{如果边 } e_j \text{ 有起始顶点 } v_i,\\ 1, & \text{如果边 } e_j \text{ 有终止顶点 } v_i,\\ 0, & \text{其他.}\end{cases}$$

(b) 图 G 的拉普拉斯矩阵 (laplacian matrix) $\boldsymbol{L}(G)$ 是 $p\times p$ 矩阵, 其 (i,j)-元 $\boldsymbol{L}_{ij}$ 如下

$$\boldsymbol{L}_{ij}=\begin{cases}-m_{ij}, & \text{如果 } i\neq j \text{ 且 } v_i \text{ 和 } v_j \text{ 之间有 } m_{ij} \text{ 条边,}\\ \deg(v_i), & \text{如果 } i=j,\end{cases}$$

其中 $\deg(v_i)$ 是与 v_i 关联的边数. 注意 $\boldsymbol{L}(G)$ 是对称的而且不依赖于定向 $\mathfrak{o}$.

例如, 设 $(G,\mathfrak{o})$ 是图 9.2中的定向图. 则

$$\boldsymbol{M}(G)=\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix},$$

$$\boldsymbol{L}(G)=\begin{bmatrix} 4 & -2 & -1 & -2 \\ -2 & 3 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}.$$

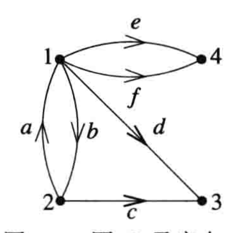


图 9.2　图 G 及定向 $\mathfrak{o}$

对任意图 G, $\boldsymbol{M}(G)$ 的每一列包含一个 1, 一个 -1 以及 $q-2$ 个 0; 故每列的元素和都是 0. 所以所有的行之和就是 0 向量, 这个线性相关关系说明 $\mathrm{rank}(\boldsymbol{M}(G))<p$. 下面的引理给出了矩阵 $\boldsymbol{M}(G)$ 和 $\boldsymbol{L}(G)$ 更进一步的两个性质.

9.6 引理　(a) 我们有 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t=\boldsymbol{L}$.

(b) 如果 G 是 d 度正则的, 那么 $\boldsymbol{L}(G)=dI-\boldsymbol{A}(G)$, 其中 $\boldsymbol{A}(G)$ 表示 G 的邻接矩阵. 因此若 G (或 $\boldsymbol{A}(G)$) 有特征值 $\lambda_1,\ldots,\lambda_p$, 则 $\boldsymbol{L}(G)$ 有特征值 $d-\lambda_1,\ldots,d-\lambda_p$.

证明　(a) 由矩阵乘积的定义立得. 特别地, 对 $v_i,v_j\in V(G)$ 我们有

$$(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t)_{ij}=\sum_{e_k\in E(G)}\boldsymbol{M}_{ik}\boldsymbol{M}_{jk}.$$

如果 $i\neq j$, 那么为使 $\boldsymbol{M}_{ik}\boldsymbol{M}_{jk}\neq 0$ 成立, 必须有边 e_k 连接顶点 v_i 和 v_j. 如果确实是该情况, 那么 $\boldsymbol{M}_{ik}$ 和 $\boldsymbol{M}_{jk}$ 必然一个是 1 另一个是 -1 [为什么], 所以它们的乘积总是 -1. 从而有 $(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t)_{ij}=-m_{ij}$, 正如所证.

还剩下 $i=j$ 的情况. 那么 $\boldsymbol{M}_{ik}\boldsymbol{M}_{ik}$ 在 v_i 是边 e_k 的顶点时为 1, 而在其他情况下为 0 [为什么]. 因此就得到 $(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t)_{ii}=\deg(v_i)$, 正如所证. 这就证明了 (a).

(b) 显然可由 (a) 推出, 因为 $\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t$ 的对角线上元素都等于 d. □

现在假设 G 是连通的, 并令 $\boldsymbol{M}_0(G)$ 为将 $\boldsymbol{M}(G)$ 中最后一行去掉所得的矩阵. 故 $\boldsymbol{M}_0(G)$ 有 $p-1$ 行 q 列. 注意到行数等于 G 的生成树的边数. 称 $\boldsymbol{M}_0(G)$ 为 G 的**约化关联矩阵** (reduced incidence matrix). 下一个结果告诉了我们 $\boldsymbol{M}_0$ 的所有 $(p-1)\times(p-1)$ 子矩阵 N 的行列式的值 (相差一个正负号). 这样的子矩阵是通过选择 G 的 $p-1$ 条边所构成的集合 $X=\{e_{i_1},\ldots,e_{i_{p-1}}\}$, 并取 $\boldsymbol{M}_0$ 的以集合 $S=\{i_1,\ldots,i_{p-1}\}$ 标记的所有列得到. 因此这个子矩阵就是 $\boldsymbol{M}_0[S]$. 为方便起见我们将不区分指标集 S 和其对应的边集 X.

9.7 引理　设集合 S 是 G 的 $p-1$ 条边构成的集合. 如果 S 不构成 G 的一个生成树的边集, 那么 $\det\boldsymbol{M}_0[S]=0$. 另一方面, 若 S 是 G 的一个生成树的边集, 则有 $\det\boldsymbol{M}_0[S]=\pm1$.

证明　如果 S 不是一个生成树的边集, 那么 S 的某个子集 R 构成 G 中一个圈 C 的边集. 假设由 R 定义的圈 C 依次有边 $f_1,\ldots,f_s$. 沿着 C 走, 如果穿过 f_i 时是沿着它的箭头方向走的, 就对 $\boldsymbol{M}_0[S]$ 的 f_i 列乘以 1; 否则就对该列乘以 -1. 然后将这些改动后的列相加. 易知 (检查些小例子以说服自己) 我们会得到一个全 0 的列. 于是 $\boldsymbol{M}_0[S]$ 的列是线性相关的, 故 $\det\boldsymbol{M}_0[S]=0$, 正如所证.

现在假设 S 是一个生成树 T 的边集. 设 e 是 T 中与 v_p 相连的边 (此顶点标记了 $\boldsymbol{M}$ 的最下边一行, 即删除该行就得到 $\boldsymbol{M}_0$). 矩阵 $\boldsymbol{M}_0[S]$ 中标记为 e 的列恰包含一个非零元 [为什么], 且是 ±1. 将该非零元所在的行和列从 $\boldsymbol{M}_0[S]$ 中删除, 就得到一个 $(p-2)\times(p-2)$ 矩阵 $\boldsymbol{M}_0'$. 注意到 $\det\boldsymbol{M}_0[S]=\pm\det\boldsymbol{M}_0'$ [为什么]. 设 T' 是将 T 的边 e 收缩为单个顶点所得的图 (故 v_p 和 e 剩下的顶点合并为单个顶点 u). 则 $\boldsymbol{M}_0'$ 就是在关联矩阵 $\boldsymbol{M}(T')$ 中删除行 u 所得的矩阵 [为什么]. 因此对顶点数 p 做归纳 ($p=1$ 的情形显然), 就得到 $\det\boldsymbol{M}_0'=\pm1$. 故 $\det\boldsymbol{M}_0[S]=\pm1$, 得证. □

注　下面是另一种方法来证明当 S 是一个生产树 T 的边集时有 $\det\boldsymbol{M}_0[S]=\pm1$. 设 $u_1,u_2,\ldots,u_{p-1}$ 是顶点 $v_1,\ldots,v_{p-1}$ 的一个排序并使得在 T 中删去顶点 $u_1,\ldots,u_{i-1}$ 后, u_i 是所得树的端点. (易知这样的排序是可行的.) 置换 $\boldsymbol{M}_0[S]$ 的行使得第 i 行以 u_i 标记. 然后按排序 $e_1,\ldots,e_{p-1}$ 置换列, 使得删除 $u_1,\ldots,u_{i-1}$ 后, e_i 是与 u_i 邻接的唯一边. 于是我们就得到了一个下三角阵, 其主对角线的元都为 ±1, 从而所求行列式为 ±1.

我们现在已经为本章的主要结果配备了所有要素. 回顾 $\kappa(G)$ 表示 G 的生成树的个数.

9.8 定理 (矩阵树定理)　设 G 是一个无自环的有限连通图, 拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}(G)$. 用 $\boldsymbol{L}_0$ 表示从 $\boldsymbol{L}$ 中删除最后一行和最后一列 (或第 i 行和第 i 列, i 任意) 所得的矩阵. 则

$$\det\boldsymbol{L}_0=\kappa(G).$$

证明　因为 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t$ (引理 9.6(a)), 所以立即有 $\boldsymbol{L}_0=\boldsymbol{M}_0\boldsymbol{M}_0^t$. 于是由 Binet-Cauchy 定

理 (定理 9.4), 可得

$$\det \boldsymbol{L}_0 = \sum_S \big(\det \boldsymbol{M}_0[S]\big)\big(\det \boldsymbol{M}_0^t[S]\big), \tag{9.4}$$

其中 S 遍历所有 $\{1,2,\ldots,q\}$ 的 $(p-1)$ 元子集 (或等价地, 遍历 G 的边集的所有 $(p-1)$ 元子集). 因为一般有 $A^t[S]=A[S]^t$, 等式 (9.4) 化为

$$\det \boldsymbol{L}_0 = \sum_S \big(\det \boldsymbol{M}_0[S]\big)^2. \tag{9.5}$$

根据引理 9.7, $\det \boldsymbol{M}_0[S]$ 在 S 构成 G 的生成树的边集时等于 ± 1, 在其他情况时等于 0. 因此等式 (9.5) 右边和式中, 对应 S 的项在 S 构成 G 的一个生成树的边集时等于 1, 在其他情况时等于 0. 于是和式等于 $\kappa(G)$, 正如所证. □

在 $\boldsymbol{L}(G)$ 中删除一行一列的操作可能看起来不太自然. 我们更希望用 $\boldsymbol{L}(G)$ 直接表达 $\kappa(G)$. 这样的表达可得自下一个引理.

9.9 引理 设 M 是 (一个域上的) $p\times p$ 矩阵, 并使得每行每列的和都为 0. 令 M_0 是从 M 中删去最后一行和最后一列 (或更一般地, 任何一行和任何一列) 所得到的矩阵. 则 M 的特征多项式 $\det(M-xI)$ 中 x 的系数等于 $-p\cdot\det(M_0)$. (更多地, $\det(M-xI)$ 的常数项等于 0.)

证明 $\det(M-xI)$ 的常数项是 $\det M$, 该值为 0 是因为 M 的行和为 0 向量.

为简单起见, 对引理的剩余部分, 我们仅证明删除最后一行一列的情形, 尽管证明对删除任一行任一列的情形也对. 将 $M-xI$ 的所有其他行加到最后一行. 这不影响行列式的值, 且最后一行的元将全都变为 $-x$ (因为 M 的行和是 0). 对最后一行提取公因子 $-x$, 即得一个矩阵 $N(x)$ 满足 $\det(M-xI)=-x\det N(x)$. 于是 $\det(M-xI)$ 中 x 的系数就是 $-\det N(0)$. 现在将 $N(0)$ 的所有其他列都加到最后一列. 这不影响 $\det N(0)$. 因为 M 的列和为 0, $N(0)$ 的最后一列变成了列向量 $[0,0,\ldots,0,p]^t$. 将行列式按最后一列展开就得到 $\det N(0)=p\cdot\det M_0$, 得证. □

9.10 推论 (a) 设 G 是一个有 p 个顶点的无自环连通图. 假设 $\boldsymbol{L}(G)$ 的特征值是 $\mu_1,\ldots,\mu_{p-1},\mu_p$, 其中 $\mu_p=0$. 则

$$\kappa(G)=\frac{1}{p}\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-1}.$$

(b) 假设 G 还是 d 度正则的, 且 $\boldsymbol{A}(G)$ 的特征值是 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{p-1},\lambda_p$, 其中 $\lambda_p=d$. 则

$$\kappa(G)=\frac{1}{p}(d-\lambda_1)(d-\lambda_2)\cdots(d-\lambda_{p-1}).$$

证明 (a) 我们有

$$\begin{aligned}\det(\boldsymbol{L}-xI) &= (\mu_1-x)\cdots(\mu_{p-1}-x)(\mu_p-x)\\ &= -(\mu_1-x)(\mu_2-x)\cdots(\mu_{p-1}-x)x.\end{aligned}$$

因此 x 的系数为 $-\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-1}$. 由引理 9.9 知 $-\mu_1\mu_2\cdots\mu_{p-1}=p\cdot\det(\boldsymbol{L}_0)$. 由定理 9.8得 $\det(\boldsymbol{L}_0)=\kappa(G)$, 得证.

(b) 由 (a) 和引理 9.6(b) 即得. □

我们看几个应用矩阵树定理的例子.

9.11 例 设 $G=K_p$ 是 p 个顶点的完全图. 现在 K_p 是 $d=p-1$ 度正则的, 且由命题 1.5, 其特征值是 -1 ($p-1$ 重) 和 $p-1=d$. 故由推论 9.10 可得

$$\kappa(K_p)=\frac{1}{p}\big((p-1)-(-1)\big)^{p-1}=p^{p-2}.$$

这么优美的结果自然需要一个组合证明才令人满意. 本章的附录介绍了三个这样的证明.

9.12 例 设 $G=C_n$ 是第2章中讨论的 n 维立方体. 现在 C_n 是 n 度正则的, 且由推论 2.4 其特征值为 $\binom{n}{i}$ 重的 $n-2i$, 其中 $0\leqslant i\leqslant n$. 故由推论 9.10 可得惊人的结果

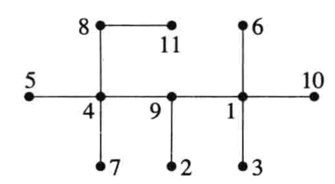
$$\begin{aligned}\kappa(C_n) &= \frac{1}{2^n}\prod_{i=1}^{n}(2i)^{\binom{n}{i}}\\ &= 2^{2^n-n-1}\prod_{i=1}^{n}i^{\binom{n}{i}}.\end{aligned}$$

一个直接的组合证明 (但不是明确的双射) 被 O. Bernardi 在 2012 年找到.

附录: 三种优美的组合证明

在这个附录中我们给出如下结果的三种优美的组合证明: 完全图 K_p 的生成树个数为 p^{p-2} (例 9.11). 证明按它们被发现的时间顺序给出.

第一种证明 (Prüfer) 给定 K_p 的一个生成树 T, 即顶点集 $[p]$ 上的树, 去除最大的端点 (叶子) v 并写下与 v 邻接的顶点 a_1. 继续此过程直到仅剩下两个顶点, 并得到序列 $(a_1,\ldots,a_{p-2})\in[p]^{p-2}$, 称为 T 的 Prüfer *序列*. 对下面的树, 我们先去除 11 并记录 8. 接着去除 10 并记录 1. 然后去除 8 并记录 4, 等等, 最终得到序列 $(8,1,4,4,1,4,9,1,9)$ 并留下两个顶点 1 和 9.

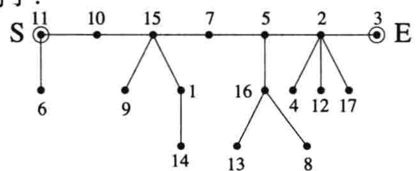


我们断言刚定义的将顶点集为 $[p]$ 的树 T 变为序列 $(a_1, \ldots, a_{p-2}) \in [p]^{p-2}$ 的映射是一个双射, 从而完成证明, 因为显然 $[p]^{p-2}$ 有 p^{p-2} 个元素. 关键事实是, 从 T 中去除的第一个顶点是 T 中最大的不在序列中的顶点 [为什么? ——这要想一想]. 这个顶点与 a_1 邻接. 对我们的例子, 11 是去除的第一个顶点, 且 11 与 8 邻接. 现在我们可以递归进行. 如果 T_1 表示从 T 中去掉最大的缺失顶点, 那么 T_1 的 Prüfer 序列就是 $(a_2, \ldots, a_{p-2})$. T_1 中要去掉的第一个顶点是 T_1 中最大的不在 $(a_2, \ldots, a_{p-2})$ 中的顶点. 这个缺失的顶点与 a_2 邻接. 对我们的例子, 这个缺失的顶点是 10 (因为 11 不是 T_1 的顶点), 其与 1 邻接. 继续这种方式, 我们确定了每一步 T 的新边. 最终我们找到了 $p-2$ 条边, 且剩下的两个未去掉的边构成了第 $(p-1)$ 条边. □

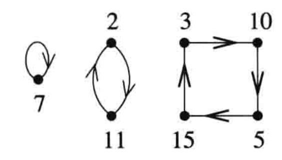
第二种证明 (Joyal)　一个双根树 (doubly rooted tree) 是一个树 T, 连同标以 S (“start” 的首字母) 的顶点 u 和标以 E (“end” 的首字母) 的顶点 v (允许等于 u). 设 $t(p)$ 是集合 $[p]$ 上的树 T 的个数, $d(p)$ 是 $[p]$ 上双根树的个数. 因为一旦选择了 T 就有 p 种方法选择 u 和 p 种方法选择 v, 所以

$$d(p) = p^2 t(p), \tag{9.6}$$

设 T 是一个双根树. 从 S 到 E 有唯一路径, 比如说其顶点依次为 $S = b_1, b_2, \ldots, b_k = E$. 下图就是一个双根树的例子.



设 $a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ 是数 $b_1, b_2, \ldots, b_k$ 的递增重排. 令 π 是由 $\pi(a_i) = b_i$ 所定义的集合 $\{a_1, \ldots, a_k\}$ 上的置换. 设 D_π 是 π 的有向图, 即 D_π 的顶点集是 $\{a_1, \ldots, a_k\}$, 有向边是 $a_i \to b_i$, 其中 $1 \leqslant i \leqslant k$. 因为任何有限集的置换 π 是一些圈的无交乘积, 所以 D_π 是一些有向圈 (沿着圈移动时所有边的指向相同) 的无交并. 对上述例子, 我们有 $k = 7$, $(b_1, \ldots, b_7) = (11, 10, 15, 7, 5, 2, 3)$ 和 $(a_1, \ldots, a_7) = (2, 3, 5, 7, 10, 11, 15)$. 有向图 D_π 如下图所示.



现在在 D_π 的每个顶点 v 处粘贴原本在 T 中粘在 v"下方" 的子图 T_v, 并将 T_v 的边都指向 v, 这样就得到了有向图 D_T. 对我们的例子就得到

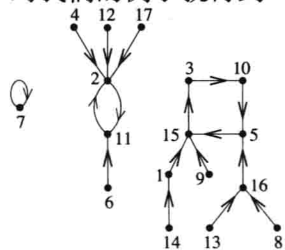
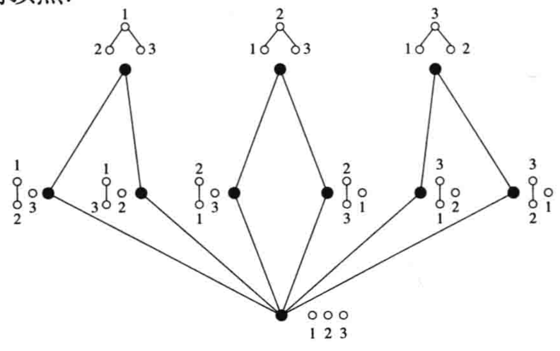


图 D_T 的关键性质是每个顶点的出度是 1, 即有一个朝外的箭头. 换句话说, D_T 是一个函数 $f\colon [p] \to [p]$ 的图, 其顶点集为 $[p]$, 边为 $i \to f(i)$. 反之, 给定一个函数 $f\colon [p] \to [p]$, 以上步骤都可逆, 用以得到唯一双根树 T 满足 D_T 是 f 的图. 于是我们就找到了一个从 $[p]$ 上的双根树到函数 $f\colon [p] \to [p]$ 的双射. 因为这种函数 f 的个数是 p^p, 所以 $d(p) = p^p$. 于是由等式 (9.6) 可得 $t(p) = p^{p-2}$. □

第三种证明 (Pitman) 森林 (forest) 是没有圈的图, 故每个连通分支都是树. 有根森林 (planted forest) 是一个森林 F, 满足它的每个连通分支 T 都有一个特殊化的顶点 r_T (称为 T 的根 (root)). 因此如果一个分支 T 有 k 个顶点, 那么就有 k 种方法来选择 T 的根.

设 P_p 是 $[p]$ 上所有有根森林的集合. 设 uv 是森林 $F \in P_p$ 的一条边, 满足 u 比 v 离它们所在分支的根 r 更近. 定义 F *覆盖* (cover) 有根森林 F', 如果 F' 是从 F 中去掉边 uv, 并将包含 v 的新树根植在 v 处. 这个覆盖的定义确定了 P_p 上偏序的覆盖关系. 在此偏序下, P_p 是秩为 $p-1$ 的分次偏序集. P_p 中森林 F 的秩就是其边数. 下图[①]展示了偏序集 P_3, 其中每个树的根是其最高顶点.



① 作者已发现图中最上层缺了 6 个顶点. ——译者注

一个简单的练习: 证明 P_p 中秩为 i 的元素 F 恰好覆盖 i 个元素并被 $(p-i-1)p$ 个元素覆盖. 现在我们用两种方法计算 P_p 的极大链的条数 M_p. 一方面, 我们从顶部开始. 有 $p\cdot t(p)$ 个 P_p 的极大元, 其中 $t(p)$ 是如上定义的顶点集为 $[p]$ 的树的个数, 因为有 p 种方法选择这样的树的根. 一旦极大元 F 选定, 那么它覆盖了 $p-1$ 个元素 F', 然后 F' 覆盖 $p-2$ 个元素, 等等. 这就给出

$$M_p = p\cdot t(p)(p-1)! = p!\,t(p). \tag{9.7}$$

另一方面, 我们可以从底部开始. 有秩为零的唯一元素 F (没有边的有根森林), 然后有 $(p-1)p$ 个元素 F' 覆盖 F, 再有 $(p-2)p$ 个元素覆盖 F', 等等. 这就给出

$$M_p = p^{p-1}(p-1)!. \tag{9.8}$$

对比等式 (9.7) 和 (9.8) 可得 $t(p)=p^{p-2}$.

我们的第三种证明不像前两个证明那样是明确的双射. 但是, 它有不依赖于顶点名称的优点. 注意到前两个证明中必须知道何时一个顶点大于另一个顶点. □

第 9 章注记

树的概念作为正式的数学对象可追溯到 G. Kirchhoff 和 K. G. C. von Staudt. A. Cayley 最先广泛研究了树, 并启用了 "树" 这一名词. 特别地, 在 [20] 中 Cayley 陈述了 K_p 的生成树个数的公式 $\kappa(K_p)=p^{p-2}$, 并给出了组合证明的模糊想法. 因为这篇文章, 通常将标号树的计数公式归于 Cayley. 但 Cayley 指出, 一个等价的结果更早地被 C. W. Borchardt [10] 证明. 进一步地, 这个结果更早出现于 J. J. Sylvester 的文章 [111]. 毫无疑问, 只要他们想这么做, Cayley 和 Sylvester 就可以提供一个完整严格的证明. 附录中优美的组合证明归于 E. P. H. Prüfer [89], A. Joyal [61, Exam. 12, pp. 15–16] 和 J. W. Pitman [83].

矩阵树定理(定理 9.8) 最早被 C. W. Borchardt [10] 于 1860 年证明, 尽管类似的结果更早地由 J. J. Sylvester [111] 发表于 1857 年. 事实上 Cayley [19, p. 279] 在 1856 年提及了 Sylvester 尚未发表的工作. 对矩阵树定理更进一步的信息, 请见 Moon [77, p. 42].

第 9 章练习

1. (*) 设 G_p 是在完全图 K_p 中去掉一条边所得的图. 图 G_p 有多少个生成树?
2. 设 $\boldsymbol{L}=\boldsymbol{L}(K_{rs})$ 是完全二部图 K_{rs} 的拉普拉斯矩阵.
   (a) 找出 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{L}-rI)$ 的一个简单上界. 推导 $\boldsymbol{L}$ 的等于 r 的特征值的个数的下界.

(b) 假设 $r \neq s$, 对 s 而不是 r 重做 (a) 部分.

(c) (*) 找出 $\boldsymbol{L}$ 的其他特征值.

(d) 利用 (a)–(c) 计算 K_{rs} 的生成树的个数 $\kappa(K_{rs})$.

(e) 通过改进 Prüfer 或 Joyal 证明 $\kappa(K_p) = p^{p-2}$ 的方法给出 $\kappa(K_{rs})$ 的公式的组合证明.

3. 设 $p \geqslant 5$, G_p 是顶点为 $\mathbb{Z}_p$ 边为 $\{i, i+1\}$ 和 $\{i, i+2\}$ 的图, 其中 $i \in \mathbb{Z}_p$. 从而 G_p 有 $2p$ 条边. 证明 $\kappa(G_p) = pF_p^2$, 其中 F_p 是 Fibonacci 数 ($F_1 = F_2 = 1$, 对 $p \geqslant 3$ 有 $F_p = F_{p-1} + F_{p-2}$).

4. 设 $\overline{C}_n$ 是立体图 C_n 的边补图, 即 $\overline{C}_n$ 有顶点集 $\{0,1\}^n$, 如果 u 和 v 至少有两个坐标不同, 就有边 uv. 求 $\overline{C}_n$ 的生成树个数 $\kappa(\overline{C}_n)$ 的一个公式. 答案应该表示成一个简单的乘积.

5. (a) (基于 P. Venkataramana 的建议) 设 G 是顶点二部划分为 (A, B) 的二部图. 假设对所有 $v \in A$ 有 $\deg v = a$, 对所有 $v \in B$ 有 $\deg v = b$. 用 $\boldsymbol{A}$ 和 $\boldsymbol{L}$ 分别表示 G 的邻接矩阵和拉普拉斯矩阵. 证明如果 $\boldsymbol{L}$ 的特征值是 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, 那么 $\boldsymbol{A}^2$ 的特征值是 $(\lambda_1 - a)(\lambda_1 - b), \ldots, (\lambda_p - a)(\lambda_p - b)$.

   (b) (*) 找出练习 2.2 中图 $\mathcal{C}_{n,k}$ 的生成树的个数.

6. (a) (*) 设 G 是有 p 个顶点的有限无自环图. 假设拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L}(G)$ 的特征值是 $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$ 和 $\theta_p = 0$. 设 J 是 $p \times p$ 的全 1 矩阵, $\alpha \in \mathbb{R}$. 证明 $\boldsymbol{L} + \alpha J$ 的特征值是 $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}, \alpha p$.

   (b) 设 $G \cup K_p$ 是在 G 的每一对不同顶点添加一条新边所得的图. 用 $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$ 表示 $G \cup K_p$ 的生成树的个数.

   (c) 假设 G 是简单图, $\overline{G}$ 是其补图 (complementary graph), 即 G 和 $\overline{G}$ 拥有相同的顶点集, 且两个不同顶点在 G 中相邻当且仅当它们在 $\overline{G}$ 中不相邻. 用 $\theta_1, \ldots, \theta_{p-1}$ 表示 $\overline{G}$ 的生成树的个数.

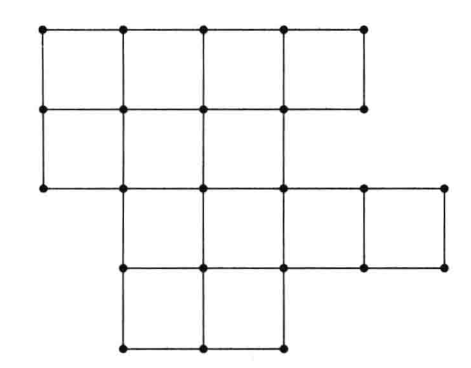
   (d) (*) 设 G 是有 p 个顶点的简单图, 并定义多项式

$$P(G, x) = \sum_F x^{c(F)-1},$$

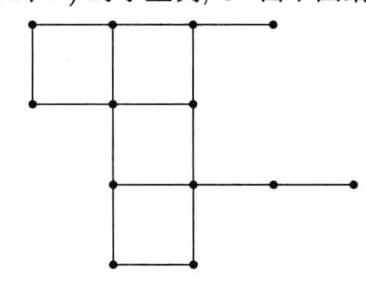
   其中 F 遍历 G 的所有生成有根森林, $c(F)$ 表示 F 的连通分支的个数. 证明

$$P(\overline{G}, x) = (-1)^{p-1} P(G, -x-p).$$

7. (*) 设 V 是某个简单封闭多边形曲线之内或之上的属于 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ 的整点子集, 该曲线的顶点属于 $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$, 且构成多边形的每个线段都平行于 x-轴或 y-轴. 在 V 的每两个距离为 1 的点之间画一条边, 前提是 e 位于边曲线之内或之上. 这样就得到一个平面图 G, 例图为



设 G' 是在对偶图 G^* 中去掉“外部”顶点所得的图. (G' 的顶点是 G 的内部区域. 对 G 的每条边 e, 比如说 e 两边是区域 R 和 R', 在 G' 中 R 和 R' 之间有一条边. 更多关于平面图的对偶信息请见11.4节.) 对于上例, G' 由下图给出



设 $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ 表示 G'(即邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(G')$) 的特征值. 证明

$$\kappa(G) = \prod_{i=1}^{p}(4 - \lambda_i).$$

8. (a) 设 $\boldsymbol{L}$ 是有 p 个顶点的图 G 的 laplacian 矩阵. 我们知道 (通过推论 9.10) 特征多项式 $\det(\boldsymbol{L} - xI)$ 中 x 的系数是 $-p\kappa(G)$. 证明事实上 x^j 的系数等于 $(-1)^j$ 乘以 $f_j(G)$, 其中 $f_j(G)$ 是 G 的具有 j 个连通分支的生成有根森林 (在本章附录第三个证明中定义) 的个数.
   (b) 用定理 5.12 推导: 序列 $f_1(G)$, $f_2(G), \ldots, f_p(G)$ 是强 log-凹的.
   (c) (极难) 设 $g_k(G)$ 表示 G 的具有 j 个连通分支的生成森林 (但非有根) 的个数. 证明序列 $g_1(G)$, $g_2(G), \ldots, g_p(G)$ 是 log-凹的. (图 K_3 表明该序列不一定是强 log-凹的.)
9. 设 G 是有 p 个顶点的点传递图. (这意味着对任意两顶点 u, v, 存在 G 的自同构 φ 使得 $\varphi(u) = v$.) 用 $\boldsymbol{A}$ 表示 G 的邻接矩阵. 证明对任意整数 $n \geqslant 1$, $\operatorname{tr}(\boldsymbol{A}^n)$ 可以被 p 整除 (其中 tr 表示迹).
10. (a) (中等困难) (*) 设 G 是 $2m$ 元顶点集 V 上的 (有限) 连通图. 对任意图及顶点 u

和 v, 用 $\mu(u,v)$ 表示 u 和 v 之间的边数. 假设存在 G 的一个自同构 $\varphi\colon V \to V$, 其轮换都是二长的. (换言之, φ 是没有不动点的对合.) 定义 商图 (quotient graph) G/φ 如下. G/φ 的顶点集是 φ 的轨道. 故 G/φ 有 m 个顶点. 记 $[v]$ 为包含顶点 v 的轨道, 于是 $[v]=\{v,\varphi(v)\}$. 令

$$\mu([u],[v]) = \mu(u,v) + \mu(\varphi(u),v).$$

例如, 如果 G 是一个 4-圈, 且 φ 将每个顶点映为其对顶点, 那么 G/φ 由一个双边构成. 如果 G 是一个 6-圈且 φ 将每个顶点映为其对顶点, 那么 G/φ 是一个三角形. 如果 $G=K_4$, 那么 G/φ (对任意 φ) 是一个双边. 如果 $G=K_{3,3}$ 那么 G/φ 对任意 φ 是一个 3-圈. 证明 $2\kappa(G)$ 可以被 $\kappa(G/\varphi)$ 整除, 其中 κ 表示生成树的个数.

(b) (困难) 证明事实上 $\kappa(G)$ 总被 $\kappa(G/\varphi)$ 整除.

11. (a) (困难) (*) 证明域 $\mathbb{F}_q$ 上 $n\times n$ 可逆对称矩阵的个数 $s(n,q)$ 由下式给出

$$s(n,q) = \begin{cases} q^{m(m-1)}(q-1)(q^3-1)\cdots(q^{2m-1}-1),\ n=2m-1, \\ q^{m(m+1)}(q-1)(q^3-1)\cdots(q^{2m-1}-1),\ n=2m. \end{cases}$$

(b) 寻找顶点集为 $[p]$ 的具有奇数个生成树的简单图的个数 $f(p)$ 的公式.

12. (*) 设 S 是 $[p]$ 的 k 元子集, $f_S(p)$ 是在顶点集 $[p]$ 上恰有 k 个分支, 且根子集为 S 的有根森林的个数, 证明公式 $f_S(p)=kn^{n-k-1}$ 成立. 推导 $[p]$ 上恰有 k 个连通分支的有根森林的个数 $f_k(p)$ 由下式给出.

$$f_k(p) = k\binom{p}{k}p^{p-k-1} = \binom{p-1}{k-1}p^{p-k}.$$

第 10 章　欧拉有向图和定向树

一个追溯到欧拉的著名问题是问哪些图 G 有一个每条边恰好经过一次的闭游动. (也有非闭游动的版本.) 这样的游动称为*欧拉环游* (Eulerian tour) (也称为*欧拉回路* (Eulerian cycle)). 具有欧拉环游的图称为*欧拉图*. 欧拉的著名定理 (图论中第一个真正的定理) 说的是没有孤立顶点 (显然无关紧要) 的图 G 是欧拉图当且仅当它是连通的而且每个顶点都是偶度的. 此处我们关心的是对有向图的类似定理. 我们不仅想知道是否存在欧拉环游, 还想知道它们的数目. 对于此数, 我们将证明一个与矩阵树定理密切相关的优美的行列式公式. 对无向图还没有类似公式, 这解释了为什么我们只考虑有向图的情形.

(有限的) *有向图* (directed graph or digraph) D 由顶点集 $V=\{v_1,\ldots,v_p\}$, 边集 $E=\{e_1,\ldots,e_q\}$, 和函数 $\varphi\colon E\to V\times V$ (V 中元素的有序对 (u,v) 所构成的集合) 共同确定. 如果 $\varphi(e)=(u,v)$, 那么将 e 想象成从 u 到 v 的箭头. 称 u 为 e 的*起始顶点* (initial vertex), v 为 e 的*终止顶点* (final vertex). (这些概念出现于定义 9.5中对定向的定义.) D 中的*环游* (tour) 是一个*不同* (distinct) 边的序列 $e_1,e_2,\ldots,e_r$, 使得对所有 $1\leqslant i\leqslant r-1$, e_i 的终止顶点是 e_{i+1} 的起始顶点, 且 e_r 的终止顶点是 e_1 的起始顶点. 如果 D 中每条边至少出现一次 (从而恰好一次), 那么这个环游称为*欧拉的* (Eulerian). 没有孤立顶点且包含欧拉环游的有向图称为*欧拉有向图* (Eulerian digraph). 显然欧拉有向图是连通的. 一个顶点 v 的*出度* (outdegree), 记为 $\mathrm{outdeg}(v)$, 是 D 中以 v 为初始顶点的边数. 类似地, v 的*入度* (indegree) 记为 $\mathrm{indeg}(v)$, 是 D 中以 v 为终止顶点的边数. 自环 (满足 $\varphi(e)=(v,v)$ 的边 e) 对出度和入度都贡献一. 如果对所有顶点 v 都有 $\mathrm{indeg}(v)=\mathrm{outdeg}(v)$, 那么称有向图是*平衡的* (balanced).

10.1 定理　*无孤立顶点的有向图 D 是欧拉的当且仅当它是连通的和平衡的.*

证明　假设 D 是欧拉的, 并设 $e_1,\ldots,e_q$ 是一个欧拉环游. 当我们沿着环游移动时, 只要进入一个顶点 v 就必然离开这个顶点, 例外是最终进入 e_q 的终止顶点后没有再离开. 但是, 最开始我们离开了 v 而没有进入它. 因此每个顶点进入与离开的次数相同, 故必有相同的入度和出度. 于是 D 是平衡的, 另外 D 显然连通.

现在假设 D 是平衡的和连通的. 可以假设 D 至少有一条边. 我们先断言对 D 的每条边 e, D 有一个以 $e=e_1$ 开始的环游. 如果 e_1 是自环则即得所求环游. 否则我们首次进入 $\mathrm{fin}(e_1)$, 因为 D 是平衡的所以存在某个离开的边 e_2. 或者 $\mathrm{fin}(e_2)=\mathrm{init}(e_1)$ 即得所求环游,

或者我们进入顶点 $\mathrm{fin}(e_2)$ 的次数比离开它的次数多 1. 因为 D 是平衡的, 所以有新边 e_3 满足 $\mathrm{fin}(e_2) = \mathrm{init}(e_3)$. 继续这样讨论, 或者我们完成了一个环游, 或者我们进入当前顶点的次数比离开它的次数多 1, 此时可以沿着一条新边离开. 因为 D 的边数有限, 最终必然完成一个环游. 于是 D 确实有一个环游使用了 e_1.

现在设 $e_1, \ldots, e_r$ 是最长的一个环游 C. 我们要证明 $r = q$, 即 D 的边数. 反设 $r < q$. 因为沿着 C 移动每个顶点进入次数与离开次数相同 (设定 $\mathrm{init}(e_1)$ 在开始时离开和最终时进入各一次), 若从 D 中删去 C 的边, 就得到一个仍然平衡但不一定连通的图 H. 但是, 因为 D 是连通的, 所以 H 至少有一个连通分支 H_1 至少包含一条边而且与 C 有一个公共顶点 v [为什么]. 因为 H_1 是平衡的, 所以存在 H_1 的一条边 e 以 v 为初始顶点. 上一段的讨论说明 H_1 有一个正长度的以边 e 开始的环游 C'. 但是沿着 C 移动到达 v 时, 我们可以 "绕道" C' 然后继续沿着 C 移动. 这样就得到了一个长度大于 r 的环游, 矛盾. 于是有 $r = q$, 定理得证. □

我们的首要目标是计数一个连通平衡有向图的欧拉环游的数目. 为此关键性的概念是定向树. 根为 v 的定向树 (oriented tree) 是包含顶点 v 的 (有限) 有向图 T, 使得从任意顶点 u 到 v 都有唯一有向路径. 换言之, 有唯一边序列 $e_1, \ldots, e_r$ 满足 (a) $\mathrm{init}(e_1) = u$, (b) $\mathrm{fin}(e_r) = v$, 和 (c) 对 $1 \leqslant i \leqslant r-1$ 有 $\mathrm{fin}(e_i) = \mathrm{init}(e_{i+1})$. 易知这意味着 T 的基础无向图 (即 "擦去" T 所有边的箭头) 是一棵树, 而且 T 的所有箭头都 "指向" v. 欧拉环游和定向树之间有一个令人惊奇的联系, 结果如下.

10.2 定理 设 D 是顶点集为 V 的连通平衡有向图. 固定 D 的一条边 e, 并记 $v = \mathrm{init}(e)$. 设 $\tau(D, v)$ 表示 D 的根为 v 的定向 (生成) 子树的个数, $\epsilon(D, e)$ 表示 D 中起始于边 e 的欧拉环游的数目. 那么

$$\epsilon(D, e) = \tau(D, v) \prod_{u \in V} (\mathrm{outdeg}(u) - 1)!. \tag{10.1}$$

证明 设 $e = e_1, e_2, \ldots, e_q$ 是 D 中的欧拉环游 $\mathcal{E}$. 对每个顶点 $u \neq v$, 令 $e(u)$ 表示环游中 "最后离开" u 的边, 即令 $e(u) = e_j$ 其中 $\mathrm{init}(e_j) = u$ 且对任意 $k > j$ 都有 $\mathrm{init}(e_k) \neq u$.

断言 #1 D 的顶点集, 连同对所有 $u \neq v$ 的边 $e(u)$, 构成 D 的一个根为 v 的定向子树.

断言 #1 的证明 直接验证如下. 设 T 是 D 的生成子图, 边集为 $\{e(u),\ u \neq v\}$. 故如果 $\#V = p$, 那么 T 有 p 个顶点和 $p-1$ 条边 [为什么]. 需要验证 3 个条件来确保 T 是根为 v 的定向树:

(a) T 不包含满足 $\mathrm{init}(f) = \mathrm{init}(f')$ 的两条边 f 和 f'. 这是显然的, 因为 f 和 f' 不可能是同一个顶点的最后离开边.

(b) T 不包含满足 $\text{init}(f) = v$ 的边 f. 这是显然的, 因为由定义, T 的边只有除顶点 v 外的其他顶点的最后离开边, 所以 T 没有边可以从 v 离开.

(c) T 不包含 (有向) 圈 C. 反设 C 是这样的一个圈. 设 C 的边 f 在欧拉环游 $\mathcal{E}$ 中出现在 C 的所有其他边之后. 设 f' 是 C 中满足 $\text{fin}(f) = \text{init}(f')$ (比如说 $= u$) 的边. 根据 (b) 不可能有 $u = v$. 因此当通过 (via) f 进入 u 时, 必然会离开 u. 因为在 $\mathcal{E}$ 中 f 发生于 f' 之后, 所以不可能通过 (via) f' 离开 u. 于是 f' 不是最后离开 u 的边, 与 T 的定义矛盾.

易知条件 (a)~(c) 蕴含 T 是根为 v 的定向树, 断言得证. □

断言 #2 断言 #1 的如下反命题成立. 给定连通平衡有向图 D 和顶点 v, 设 T 是 D 的根为 v 的 (生成) 子树. 那么我们可以如下构造欧拉环游 $\mathcal{E}$. 选择满足 $\text{init}(e_1) = v$ 的一条边 e_1. 接着继续选择任意一条可能的边来继续环游, 但是不允许在还有其他选择的情况下选择 T 的边 f, 即除非在我们到达的顶点处只剩下 f 可供离开. 这样的过程直到所有的边用完是不会卡住的, 于是就构造了一个欧拉环游 $\mathcal{E}$. 进一步地, $\mathcal{E}$ 从 D 的顶点 $u \neq v$ 最后离开的边所构成的集合与定向树 T 的边集一致.

断言 #2 的证明 因为 D 是平衡的, 唯一被卡住的可能是终止在 v 时, 没有可供离开的边, 但有仍未使用的边. 假设就是这个情况. 至少有一条未使用的边是最后离开边, 即 T 的边 [为什么]. 设 T 的顶点 u 是满足如下条件的在 T 中与 v 最近的顶点: T 中满足 $\text{init}(f) = u$ 的唯一边 f 不在环游中. 设 $y = \text{fin}(f)$. 假设 $y \neq v$. 因为我们进入与离开 y 的次数相同, 所以我们没有使用从 y 最后离开的边. 从而 $y = v$[①]. 但那样的话我们就可以离开 v 了, 矛盾. 这就证明了断言 #2. □

我们已经证明每个开始于边 e 的欧拉环游 $\mathcal{E}$ 都关联了一个根为 $v = \text{init}(e)$ 的 “最后离开” 定向子树 $T = T(\mathcal{E})$. 反过来, 给定一个根为 v 的定向子树 T, 我们可以通过如下方式得到所有开始于 e 并且满足 $T = T(\mathcal{E})$ 的欧拉环游 $\mathcal{E}$: 对每个顶点 $u \neq v$, 对以 u 为起始点并且不在 T 中的边选择出现在 $\mathcal{E}$ 中的次序, 此外还对以 v 为起始点的除 e 外的所有边选择出现在 $\mathcal{E}$ 中的次序. 因此对每个顶点 u 有 $(\text{outdeg}(u) - 1)!$ 种选择, 从而对每个 T 有 $\prod_u (\text{outdeg}(u) - 1)!$ 种选择. 最后有 $\tau(D, v)$ 种方法来选择 T, 证明完毕. □

10.3 推论 设 D 是连通平衡有向图, v 是 D 的一个顶点. 则根为 v 的定向生成子树的数目 $\tau(D, v)$ 与 v 无关.

证明 设 e 是一条起始点为 v 的边. 由等式 (10.1), 我们需要证明开始于边 e 的欧拉环游数 $\epsilon(D, e)$ 与 e 无关. 但 $e_1 e_2 \cdots e_q$ 是欧拉环游当且仅当 $e_i e_{i+1} \cdots e_q e_1 e_2 \cdots e_{i-1}$ 也是欧拉环游, 得证 [为什么]. □

---

① 因为 y 比 u 离 v 近, 且 y 的最后离开边不在环游中, 所以与 u 的选取矛盾. ——译者注

接下来我们显然要做的就是找到 $\tau(D,v)$ 的一个公式. 这个结果与矩阵树定理很类似, 事实上我们将证明 (例 10.6) 矩阵树定理是定理 10.4 的简单推论.

10.4 定理　设 D 是连通有向图, 它的顶点集是 $V=\{v_1,\ldots,v_p\}$ 且在顶点 v_i 处有 l_i 个自环. 设 $p\times p$ 矩阵 $\boldsymbol{L}(D)$ 定义为

$$\boldsymbol{L}_{ij}=\begin{cases}-m_{ij}, & \text{若 } i\neq j \text{ 且有 } m_{ij} \text{ 条边起始顶点为 } v_i \text{ 终止顶点为 } v_j,\\ \operatorname{outdeg}(v_i)-l_i, & \text{若 } i=j.\end{cases}$$

(因此 $\boldsymbol{L}$ 是无向图的拉普拉斯矩阵的有向模拟.) 设 $\boldsymbol{L}_0$ 表示将 $\boldsymbol{L}$ 最后一行一列删去后所得的矩阵. 则

$$\det\boldsymbol{L}_0=\tau(D,v_p). \tag{10.2}$$

注　如果从 $\boldsymbol{L}$ 中删除第 i 个行和列而不是最后的行和列, 那么等式 (10.2) 仍然成立, 其中 v_p 需要替换为 v_i.

证明 (概略)　对 D 的边数 q 归纳. (因为 D 是连通的) D 最少要有 $p-1$ 条边. 假设 D 有 $p-1$ 条边, 这使得作为无向图 D 是一棵树. 如果 D 不是以 v_p 为根的定向树, 那么 D 的某个顶点 $v_i\neq v_p$ 的出度为 0 [为什么]. 于是 $\boldsymbol{L}_0$ 有一零行, 可得 $\det\boldsymbol{L}_0=0=\tau(D,v_p)$. 否则若 D 是以 v_p 为根的定向树, 则类似于证明引理 9.7 (在 S 是一个生成树的边集的情形) 的论证可以说明 $\det\boldsymbol{L}_0=1=\tau(D,v_p)$.

现在假设 D 有 $q>p-1$ 条边, 并假设定理对至多有 $q-1$ 条边的有向图成立. 可以假设 D 不包含以 v_p 为起始顶点的边 f, 因为这样的边不属于任何以 v_p 为根的定向树, 并且对 $\boldsymbol{L}_0$ 没有贡献. 于是可推知, 如果 D 至少有 p 条边, 那么存在 D 的出度至少为 2 的顶点 $u\neq v_p$. 设 e 是满足 $\operatorname{init}(e)=u$ 的一条边. 设 D_1 是从 D 中删去边 e 所得的有向图. 设 D_2 是从 D 中将所有满足 $\operatorname{init}(e)=\operatorname{init}(e')$ 和 $e'\neq e$ 的边 e' 删去所得的图. (注意到由 $\operatorname{outdeg}(u)\geqslant 2$ 可知 D_2 严格小于 D.) 由归纳假设, 我们有 $\det\boldsymbol{L}_0(D_1)=\tau(D_1,v_p)$ 和 $\det\boldsymbol{L}_0(D_2)=\tau(D_2,v_p)$. 显然 $\tau(D,v_p)=\tau(D_1,v_p)+\tau(D_2,v_p)$, 因为在以 v_p 为根的定向树 T 中, 存在恰好一条与 e 具有相同起始顶点的边. 另一方面, 由行列式的多重线性性即得 [为什么]

$$\det\boldsymbol{L}_0(D)=\det\boldsymbol{L}_0(D_1)+\det\boldsymbol{L}_0(D_2).$$

由此及归纳法, 定理得证. □

10.5 推论　设 D 是连通平衡有向图, 它的顶点集是 $V=\{v_1,\ldots,v_p\}$. 设 e 是 D 的一条边. 则 D 的第一条边为 e 的欧拉环游数目 $\epsilon(D,e)$ 是

$$\epsilon(D,e)=\big(\det\boldsymbol{L}_0(D)\big)\prod_{u\in V}(\operatorname{outdeg}(u)-1)!.$$

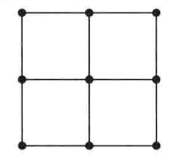
等价地 (因为 D 是平衡的, 所以引理 9.9 适用), 如果 $\boldsymbol{L}(D)$ 有特征值 $\mu_1, \ldots, \mu_p$ 其中 $\mu_p = 0$, 那么

$$\epsilon(D, e) = \frac{1}{p}\mu_1 \cdots \mu_{p-1} \prod_{u \in V} (\text{outdeg}(u) - 1)!.$$

证明 结合定理 10.2 和 10.4. □

10.6 例 (再访矩阵树定理) 设 $G = (V, E, \varphi)$ 是连通无自环的无向图. 令 $\widehat{G} = (V, \widehat{E}, \widehat{\varphi})$ 为在 G 中将 G 的每条边 e(其中 $\varphi(e) = \{u, v\}$) 替换为一对满足 $\widehat{\varphi}(e') = (u, v)$ 和 $\widehat{\varphi}(e'') = (v, u)$ 的有向边 e' 和 e'' 所得的有向图. 显然 $\widehat{G}$ 是平衡连通的. 选择 G 的一个顶点 v. 在 G 的生成树 T 和 $\widehat{G}$ 的根为 v 的定向生成树 $\widehat{T}$ 之间有一个自然的双射, 就是说, 将 T 的每条边都指向 v. 进一步地, $\boldsymbol{L}(G) = \boldsymbol{L}(\widehat{G})$ [为什么]. 因此矩阵树定理就是定理 10.4的即得推论.

10.7 例 (高效邮递员) 一个邮递员必须在一个街区路线中传递邮件. 他希望如下完成这项工作: 沿着每个街区走两遍, 两个方向各一次, 这样就可以经过街道两边的所有房子. 他还希望终止于他出发的地方, 就是他泊车的位置. 街区构成了图 G 的边, 其顶点就是交叉点. 邮递员希望简单地沿着上例中有向图 $\widehat{G}$ 的欧拉环游来行走. 在合理的图的连通性假设下, 不仅是欧拉环游总存在, 我们还可以告诉邮递员有多少环游. 因此他会知道可以采用多少不同的路线来打发无聊. 例如, 假设 G 是如下展示的 3×3 格子图.



此图有 192 个生成树. 因此邮递员出发于固定边 (给定方向) 的路线方案数为 $192 \cdot 1!^4\, 2!^4\, 3! = 18432$. 总路线数就是 18432 乘以两倍的边数 [为什么], 即 $18432 \times 24 = 442368$. 假设邮递员一年送信 250 天, 那么他可以不用重复路线地送信 1769 年!

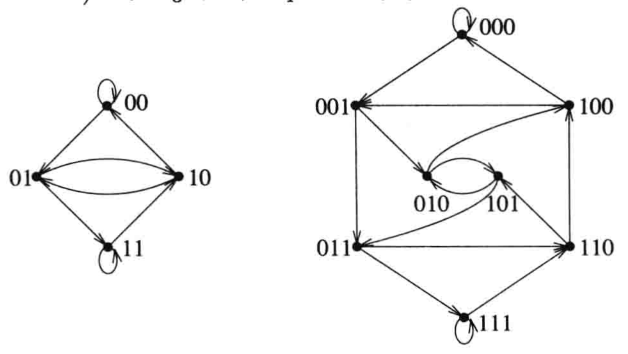
10.8 例 (二元 de Bruijn 序列) 二元序列 (binary sequence) 就是 0 和 1 的序列. n 次的二元 de Bruijn 序列是一个二元序列 $A = a_1 a_2 \cdots a_{2^n}$ 满足每个 n 长二元序列 $b_1 \cdots b_n$ 作为 A 的 "循环因子" 恰好出现一次, 即出现为 $a_i a_{i+1} \cdots a_{i+n-1}$, 其中如果需要的话, 下标取模 2^n 运算. 例如, 序列 $abcdefg$ 的一些循环因子为 a, $bcde$, $fgab$ 和 $defga$. 注意到恰好有 2^n 个 n 长二元序列, 所以 n 次二元 de Bruijn 序列的唯一可能长度是 2^n [为什么]. 显然一个二元 de Bruijn 序列 $a_1 a_2 \cdots a_{2^n}$ 的循环移位 $a_i a_{i+1} \cdots a_{2^n} a_1 a_2 \cdots a_{i-1}$ 也是二元 de Bruijn 序列, 称这样的两个序列等价 (equivalent). 这个等价所定义的关系显然是一个等价关系, 而且每个等价类恰好包含一个以 n 个 0 开始的序列 [为什么]. 在等价意义下, 有一个二次二元 de Bruijn 序列, 即 0011. 容易验证有两个三次二元 de Bruijn 序列, 即 00010111 和 00011101. 但是, 此刻还不清楚是否对所有 n 都存在 de Bruijn 序列. 通过巧妙应用定理 10.2和 10.4, 我们不仅要证明这种序列对所有正整数 n 都存在, 还将研究有多少个这样的序列. 结果是有

很多 (lots). 比如, 不等价的 8 次二元 de Bruijn 序列的个数等于

$$1329227995784915872903807060280344576,$$

读者可以通过写下所有的这些序列来验证该结果. De Bruijn 序列在开关网络设计和相关课题上有若干有趣的应用.

我们计数二元 de Bruijn 序列的方法是建立它们和某个称为 n 次 de Bruijn 图的有向图 D_n 的欧拉环游之间的对应. 图 D_n 有 2^{n-1} 个顶点, 我们取为 2^{n-1} 个 $n-1$ 长的二元序列. 一对顶点 $(a_1a_2\cdots a_{n-1}, b_1b_2\cdots b_{n-1})$ 构成 D_n 的一条边当且仅当 $a_2a_3\cdots a_{n-1}=b_1b_2\cdots b_{n-2}$, 即 e 是一条边如果 $\mathrm{init}(e)$ 的后 $n-2$ 项与 $\mathrm{fin}(e)$ 的前 $n-2$ 项一致. 因此每个顶点都有入度 2 和出度 2 [为什么], 从而 D_n 是平衡的. D_n 的边数是 2^n. 进一步地, 易知 D_n 是连通的 (见引理 10.9). 图 D_3 和图 D_4 如下图所示:



假设 $\mathcal{E}=e_1e_2\cdots e_{2^n}$ 是 D_n 中的欧拉环游. 如果 $\mathrm{fin}(e_i)$ 是二元序列 $a_{i,1}a_{i,2}\cdots a_{i,n-1}$, 那么就在 $\mathcal{E}$ 中将 e_i 替换为尾字节 $a_{i,n-1}$. 例如, 欧拉环游 (其中我们只写顶点)

$$000,000,001,010,101,011,111,111,110,101,010,100,001,011,110,100,000$$

对应 de Bruijn 序列 0101111010011000 (在上面除第一个顶点 000 外的其他顶点中取尾字节). 易见所得到的序列 $\beta(\mathcal{E})=a_{1,n-1}a_{2,n-1}\cdots a_{2^n,n-1}$ 是一个二元 de Bruijn 序列, 而且反过来每个二元 de Bruijn 序列都可通过这种方式产生. 特别地, 因为 D_n 是平衡连通的, 所以至少存在一个二元 de Bruijn 序列. 为得到这种序列的总数, 我们需要计算 $\det \boldsymbol{L}(D_n)$. 一个方法是通过一系列巧妙但复杂的初等行列变换将行列式转化为三角形. 但基于下面的简单引理, 我们将给出计算 $\boldsymbol{L}(D_n)$ 特征值的一个漂亮方法.

10.9 引理　设 u 和 v 是 D_n 的任意两个顶点. 则从 u 到 v 的长为 $n-1$ 的 (有向) 路存在且唯一.

证明　假设 $u=a_1a_2\cdots a_{n-1}$, $v=b_1b_2\cdots b_{n-1}$. 那么从 u 到 v 的长为 $n-1$ 的 (有向) 路

的顶点可以且必须为

$$a_1a_2\cdots a_{n-1}, a_2a_3\cdots a_{n-1}b_1, a_3a_4\cdots a_{n-1}b_1b_2, \ldots,$$

$$a_{n-1}b_1\cdots b_{n-2}, b_1b_2\cdots b_{n-1}.$$

□

10.10 定理 矩阵 $\boldsymbol{L}(D_n)$ 的特征值是 0 (1 重) 和 2 ($2^{n-1}-1$ 重).

证明 设 $\boldsymbol{A}(D_n)$ 表示 D_n 的有向邻接矩阵, 即用顶点来标记行和列时有

$$\boldsymbol{A}_{uv} = \begin{cases} 1, \text{若 } (u,v) \text{ 是一条边}, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

现在引理 10.9 等价于声明 $\boldsymbol{A}^{n-1}=J$ 是 $2^{n-1}\times 2^{n-1}$ 的全 1 矩阵 [为什么]. 如果 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 $\lambda_1,\ldots\lambda_{2^{n-1}}$, 那么 $J=\boldsymbol{A}^{n-1}$ 的特征值就是 $\lambda_1^{n-1},\ldots,\lambda_{2^{n-1}}^{n-1}$. 由引理 1.4, J 的特征值是 2^{n-1} (1 重) 和 0 ($2^{n-1}-1$ 重). 因此 $\boldsymbol{A}$ 的特征值是 2ζ (1 重, 其中 ζ 是一个待定的 $(n-1)$ 次单位根) 和 0 ($2^{n-1}-1$ 重). 因为 $\boldsymbol{A}$ 的迹是 2, 所以 $\zeta=1$, 这样就找齐了 $\boldsymbol{A}$ 的所有特征值.

现在 $\boldsymbol{L}(D_n)=2I-\boldsymbol{A}(D_n)$ [为什么]. 于是 $\boldsymbol{L}$ 的特征值为 $2-\lambda_1,\ldots,2-\lambda_{2^{n-1}}$, 再根据上面所确定的 $\lambda_1,\ldots,\lambda_{2^{n-1}}$, 定理得证. □

10.11 推论 *以 n 个 0 开始的 n 次二元 de Bruijn 序列的个数 $B_0(n)$ 等于 $2^{2^{n-1}-n}$. n 次二元 de Bruijn 序列的总数 $B(n)$ 等于 $2^{2^{n-1}}$.*

证明 通过上述讨论, $B_0(n)$ 是 D_n 中第一条边为顶点 $00\cdots 0$ 处的自环的欧拉环游的个数. 进一步地, D_n 中每个点的出度为 2. 因此由推论 10.5 和定理 10.10 可得

$$B_0(n) = \frac{1}{2^{n-1}}2^{2^{n-1}-1} = 2^{2^{n-1}-n}.$$

最后, $B(n)$ 就是 $B_0(n)$ 乘以边数 2^n, 得证. □

注意到长为 2^n 的二元序列总数为 $N=2^{2^n}$. 由上个推论, 其中的 de Bruijn 序列的个数恰为 $\sqrt{N}$. 这建议了下面这个直到 2009 年才解决的问题. 设 $\mathcal{A}_n$ 是所有 2^n 长的二元序列的集合, $\mathcal{B}_n$ 是 n 次二元 de Bruijn 序列的集合. 找到一个明确的双射

$$\psi\colon \mathcal{B}_n\times\mathcal{B}_n\to\mathcal{A}_n, \tag{10.3}$$

从而给出推论 10.11的一个组合证明.

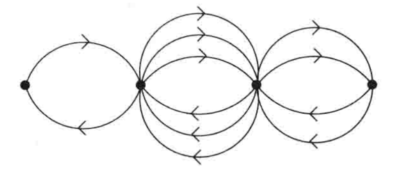
第 10 章注记

定理 10.1 中关于欧拉有向图的刻画是 I. J. Good 的一个结果 [45], 而用于证明定理 10.2 的定向子树和平衡有向图中的欧拉环游之间的基本联系, 是由 T. van Aardenne-Ehrenfest 和 N. G. de Bruijn 给出的 [119, Theorem 5a]. 这个结果有时称为 BEST 定理, 以 de **B**ruijn, van Aardenne-**E**hrenfest, **S**mith 和 **T**utte 命名. 然而, Smith 和 Tutte 并没有参与最初的发现. (在 [99] 一文中 Smith 和 Tutte 对一类特殊平衡有向图得到了其欧拉环游数的行列式公式. Van Aardenne-Ehrenfest 和 de Bruijn 在证明中的脚注中引用了 Smith 和 Tutte 的文章.) 关于有向图的定向子树个数的行列式公式 (定理 10.4) 归功于 Tutte [116, Theorem 3.6].

De Bruijn 序列因 de Bruijn 的文章 [24] 而命名, 其中计数了二元的情形. 然而, R. Stanley 在 1975 年发现, 如 de Bruijn [26] 所公布的, 早在 1894 年 C. Flye Sainte-Marie [35] 就有了这个工作. 到 d 元 de Bruijn 序列 (练习 10.2) 的推广归功于 T. van Ardenne-Ehrenfest 和 de Bruijn [119]. 该领域一些近期的工作出现在 *Discrete Mathematics* 的一个特刊 [109] 中. P. Diaconis 和 R. Graham [29, Chs. 2–4] 给出了一些在魔术中的娱乐性应用. 等式 (10.3) 的双射 ψ 归功于 H. Bidkhori 和 S. Kishore [8].

第 10 章练习

1. 选择正整数 $a_1, \ldots, a_{p-1}$. 设 $D = D(a_1, \ldots, a_{p-1})$ 为如下定义的有向图. D 的顶点是 $v_1, \ldots, v_p$. 对每个 $1 \leqslant i \leqslant p-1$, 有 a_i 条从 x_i 到 x_{i+1} 的边和 a_i 条从 x_{i+1} 到 x_i 的边. 例如, $D(1,3,2)$ 如下图所示



   (a) 通过直接讨论 (不要用行列式) 求根为 v 的定向子树的个数 $\tau(D, v)$.

   (b) 求第一条边是 e 的 D 上欧拉环游的个数 $\epsilon(D, e)$.

2. 设 $d > 1$. n 次 d 元 de Bruijn 序列是一个序列 $A = a_1a_2\cdots a_{d^n}$, 其元素 a_i 属于 $\{0, 1, \ldots, d-1\}$, 且满足每个 n 长的 d 元序列 $b_1b_2\cdots b_n$ 作为 A 的循环因子恰好出现一次. 求以 n 个 0 开始的 n 次 d 元 de Bruijn 序列的个数.

3. 设 G 是有 p 个顶点 q 条边无自环的 d 度正则 (无向) 图.
   (a) 求 p, q 和 d 之间的一个简单关系.
   (b) (*) 用 p, q 和 d 表示 G 的邻接矩阵 $\boldsymbol{A}$ 的最大特征值.
   (c) 假设 G 还没有重边. 用 p, q 和 d 表示 G 中长为 2 的闭游动个数.
   (d) 假设 G 无重边且 G 中长为 ℓ 的闭游动个数为

$$6^{\ell} + 2 \cdot (-3)^{\ell}.$$

   求 G 的生成树个数 $\kappa(G)$. (别忘了 $\boldsymbol{A}$ 可能有特征值 0.) 给一个纯数字答案, 不允许用 p, q 或 d.
   (e) 设 G 如 (d). 有多少条 G 中的闭游动沿着 G 的每条边每个方向恰好走过一次? 给一个纯数字答案.
4. (困难) 设 $f(p)$ 是顶点集 $[p]$ 上恰有一个欧拉环游 (在循环移位的意义下) 的无自环连通有向图 D 的个数. 例如, $f(3) = 5$; 两个这种图是三角形, 另外三个是有公共顶点的两个 2-圈. 证明

$$f(p) = (p+2)(p+3)\cdots(2p-1), \quad p \geqslant 2.$$

5. 假设连通有向图 D 有 p 个顶点, 每个顶点出度和入度都是 d. 设 D' 是在 D 中将每个边加倍所得的图, 即将每个边 $u \to v$ 替换为两个这样的边. 用 $\epsilon(D, e)$ 表示 $\epsilon(D', e')$ (D' 中以边 e' 开始的欧拉环游个数).
6. 设 D 是有 p 个顶点的有向图, 并设 ℓ 是一个固定的正整数. 假设对 D 的每个顶点对 u, v, 从 u 到 v 长为 ℓ 的 (有向) 游动存在且唯一.
   (a) (*) (有向) 邻接矩阵 $\boldsymbol{A}(D)$ 的特征值是什么?
   (b) D 有多少个自环 (v, v)?
   (c) (*) 证明 D 是连通平衡的.
   (d) 证明所有顶点有相同的入度 d 和相同的出度, 由 (c) 知出度也为 d. 求 p, d 和 ℓ 之间的一个简单关系.
   (e) D 有多少个欧拉环游?
   (f) (*) (开放式) 关于 D 还可以说些什么? 证明 D 可以不是 de Bruijn 图 (用来解决第 2题的图).
7. (a) 设 $n \geqslant 3$. 证明不存在序列 $a_1, a_2, \ldots, a_{n!}$ 使得 $n!$ 个循环因子 $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n-1}$ (如果需要的话下标取模 $n!$ 运算) 是 $[n]$ 的 $n!$ 个排列.
   (b) 证明对所有 $n \geqslant 1$ 存在一个序列 $a_1, a_2, \ldots, a_{n!}$ 使得 $n!$ 个循环因子 $a_i, a_{i+1}, \ldots, a_{i+n-2}$ 由 $[n]$ 的所有排列 $b_1, b_2, \ldots, b_n$ 的前 $n-1$ 项 $b_1, \ldots, b_{n-1}$ 组成. 这样的序列称为 $\mathfrak{S}_n$ 的万能圈 (universal cycle). 当 $n = 3$ 时, 一个这种万能圈的例子是 123213.

(c) 当 $n=3$ 时, 求以 123 开始的万能圈的个数.

(d) (未解决) 求以 $1,2,\ldots,n$ 开始的 $\mathfrak{S}_n$ 的万能圈的个数 U_n. 已知的有

$$
\begin{aligned}
U_4 &= 2^7 \cdot 3 \\
U_5 &= 2^{33} \cdot 3^8 \cdot 5^3 \\
U_6 &= 2^{190} \cdot 3^{49} \cdot 5^{33} \\
U_7 &= 2^{1217} \cdot 3^{123} \cdot 5^{119} \cdot 7^5 \cdot 11^{28} \cdot 43^{35} \cdot 73^{20} \cdot 79^{21} \cdot 109^{35}.
\end{aligned}
$$

更多地, U_9 可以被 p^{168} 整除, 其中 $p = 59\ 229\ 013\ 196\ 333$ 是素数. 很可能不存在 U_n 的 "好" 公式. U_n 的因式分解中, 有些, 但不是所有的, 因子可以用 $\mathfrak{S}_n$ 的表示论来解释, 但该理论超出了本书的范畴.

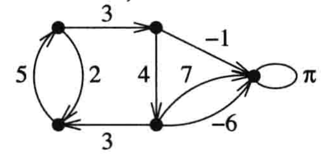
第 11 章　圈, 键和电子网络

11.1　圈空间和键空间

本章将处理一些与有向图结构相关的有趣的线性代数. 设 $D = (V, E)$ 是一个有向图. 如果函数 $f\colon E \to \mathbb{R}$ 满足对每一个顶点 $v \in V$ 都有

$$\sum_{\substack{e\in E \\ \mathrm{init}(e)=v}} f(e) = \sum_{\substack{e\in E \\ \mathrm{fin}(e)=v}} f(e). \tag{11.1}$$

那么我们称为*环流* (circulation). 如果我们将边看做是管道, 想象一些货物 (如石油) 在管道中沿着特定的方向以 f 确定的速率 (每单位时间的数量) 流动 (规定负值 $f(e)$ 意味着以速率 $|f(e)|$ 沿着与 e 相反的方向流动), 那么等式 (11.1) 就是说对每一个顶点, 流入与流出的量相等. 换言之, 流是*保守的* (conservative). 下图展示了有向图 D 的一个环流.



记 $\mathcal{C} = \mathcal{C}_D$ 为 D 上所有环流构成的集合. 显然如果 $f, g \in \mathcal{C}, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ 那么 $\alpha f + \beta g \in \mathcal{C}$. 从而 $\mathcal{C}$ 是一个 (实) 向量空间, 称为 D 的*圈空间* (cycle space). 因此, 如果 $q = \#E$, 那么 $\mathcal{C}_D$ 是所有映射 $f\colon E \to \mathbb{R}$ 构成的 q 维向量空间 $\mathbb{R}^E$ 的子空间.

为什么称环流为 "循环的" 流? 什么称圈空间为圈的空间? 为理解这些, 定义 D 中一个*回路* (circuit) 或*基本圈* (elementary cycle) 为一个闭游动的边集, 这里的闭游动*忽略边的箭头方向* (ignoring the direction of the arrows), 且除第一个和最后一个顶点外没有重复顶点. 假设回路 C 被赋予了一个定向 (行进的方向) $\mathfrak{o}$. (注意此处的定向不同于出现在定义 9.5中的定向.)

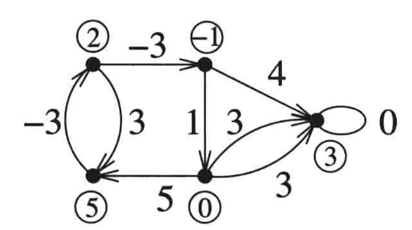
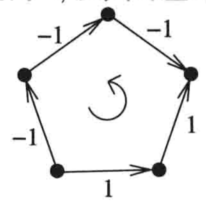


图 11.1 一个 (位势) 函数和它的上边缘

定义一个函数 $f_C\colon E \to \mathbb{R}$ (也取决于定向 $\mathfrak{o}$, 但我们在记号中省略了) 如下

$$f_C(e) = \begin{cases} 1, 若\ e \in C\ 且\ e\ 与\ \mathfrak{o}\ 相同, \\ -1, 若\ e \in C\ 且\ e\ 与\ \mathfrak{o}\ 相反, \\ 0, 其他. \end{cases}$$

易见 f_C 是一个环流. 后面我们将看到环流 f_C 生成了圈空间 $\mathcal{C}$, 这就解释了术语 “循环的” 和 “圈空间”. 下图展示了回路 C 与定向 $\mathfrak{o}$, 及其对应的环流 f_C.



给定一个函数 $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$, 称为 D 上的位势 (potential), 如下定义一个新函数 $\delta\varphi\colon E \to \mathbb{R}$, 称为 φ 的上边缘 (coboundary)[①]:

$$\delta\varphi(e) = \varphi(v) - \varphi(u), \quad 如果\ u = \mathrm{init}(e)\ 且\ v = \mathrm{fin}(e).$$

图 11.1 展示了在顶点 v 处标有函数 $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ 的值 $\varphi(v)$, 在边 e 处标有值 $\delta\varphi(e)$ 的有向图 D.

读者可以将 δ 看做一个算子, 作用在所有函数 $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ 所构成的向量空间 $\mathbb{R}^V$ 上, 其像属于所有函数 $E \to \mathbb{R}$ 所构成的向量空间 $\mathbb{R}^E$. 由 δ 的定义立得 δ 是线性的 (linear), 即对所有 $\varphi_1, \varphi_2 \in \mathbb{R}^V$ 和 $a, b \in \mathbb{R}$, 都有

$$\delta(a\varphi_1 + b\varphi_2) = a \cdot \delta\varphi_1 + b \cdot \delta\varphi_2.$$

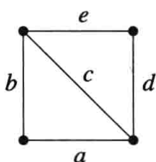
因此 δ 就是两个有限维线性空间之间的线性变换 $\delta\colon \mathbb{R}^V \to \mathbb{R}^E$.

函数 $g\colon E \to \mathbb{R}$ 称为 D 上的位势差 (potential difference), 如果存在 $\varphi\colon V \to \mathbb{R}$ 使得 $g = \delta\varphi$. (后面我们将看到它与电子网络的联系以解释名词 “位势差”.) 记 $\mathcal{B} = \mathcal{B}_D$ 为 D 上

① 名词 “上边缘” 源自代数拓扑, 但我们就不解释其中的联系了.

所有位势差所构成的集合, 从而 $\mathcal{B}$ 就是线性变换 δ 的像, 故为实向量空间, 称之为 D 上的键空间 (bond space).

下面解释名词 "键空间" 的由来. 有向图 D 的一个键 (bond)① 是一个边集 B 满足 (a) 从 D 中删除 B 将割断 D 的一些 (无向的) 连通分支 (即删除 B 将得到一个比 D 具有更多作为无向图的连通分支的有向图), (b) B 的真子集都不满足前一性质. 满足条件 (a) 的边子集称为割集 (cutset), 所以一个键就是一个极小割集. 例如, 假设 D 如下给出 (因为箭头与键的定义无关故省略):



那么键就是 6 个子集 $ab, de, acd, bce, ace, bcd$.

设 B 是一个键. 假设 B 将连通分支 (V', E') 分割为两块 (一个键总可以将某个连通分支分成恰好两块 [为什么]), 一块的顶点集为 S, 另一块的顶点集为 $\bar{S}$. 于是 $S \cup \bar{S} = V'$ 且 $S \cap \bar{S} = \emptyset$. 定义

$$[S, \bar{S}] = \{e \in E\colon\ e \text{ 中恰好一点属于 } S \text{ 一点属于 } \bar{S}\}.$$

显然 $B = [S, \bar{S}]$. 为方便起见, 我们用 $[S, \bar{S}]$ 表示一个键.

给定 D 的键 $B = [S, \bar{S}]$, 定义函数 $g_B\colon E \to \mathbb{R}$ 为

$$g_B(e) = \begin{cases} 1, \text{如果 } \operatorname{init}(e) \in \bar{S}, \operatorname{fin}(e) \in S, \\ -1, \text{如果 } \operatorname{init}(e) \in S, \operatorname{fin}(e) \in \bar{S}, \\ 0, \text{其他}. \end{cases}$$

注意 g_B 其实不仅依赖于 B, 而且依赖于我们是把 B 写成 $[S, \bar{S}]$ 还是 $[\bar{S}, S]$. 将 B 反过来写就改变了 g_B 的符号. 约定在处理 g_B 的任何时候, 我们都已经做了选择 $B = [S, \bar{S}]$.

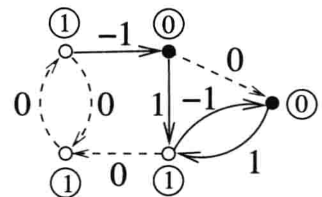
现在注意到 $g_B = \delta\varphi$, 其中

$$\varphi(v) = \begin{cases} 1, \text{若 } v \in S, \\ 0, \text{若 } v \notin S. \end{cases}$$

因此 g_B 属于 D 的键空间 $\mathcal{B}$. 后面我们将看到 $\mathcal{B}$ 事实上由函数 g_B 生成, 这就解释了名词 "键空间".

① 键是 bond 一词源自化学的译文, 更确切的译文就是后面提到的极小割集, 但后者与本书的翻译多处不太匹配. ——译者注

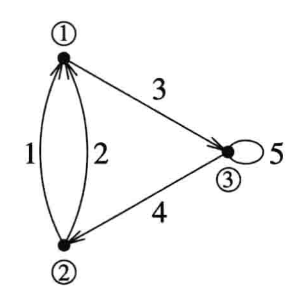
11.1 例 在下面的有向图中，对给定键 $B=[S,\bar{S}]$，用开 (白) 顶点表示 S 的元素而用闭 (黑) 顶点表示 $\bar{S}$ 中的元素. B 中的元素用实线画出. 边用 g_B 中的值标示，顶点用满足 $g_B=\delta\varphi$ 的函数 φ 标示.



回顾在定义 9.5中我们定义了无自环的无向图 G 相对于一个定向 $\mathfrak{o}$ 的关联矩阵. 也可以认为具有定向 $\mathfrak{o}$ 的图 G 就是有向图. 我们将允许自环. 因此如果 $D=(V,E)$ 是任意 (有限) 有向图, 定义关联矩阵 (incidence matrix) $\boldsymbol{M}=\boldsymbol{M}(D)$ 为如下的 $p\times q$ 阶矩阵, 其行用 V 依次标号, 列用 E 标号. 矩阵的第 $v\in V$ 行, 第 $e\in E$ 列的元素记为 $m_v(e)$ 并由下式给出

$$m_v(e)=\begin{cases}-1, \text{若 } v=\operatorname{init}(e) \text{ 且 } e \text{ 不是自环},\\ \ \ 1, \text{若 } v=\operatorname{fin}(e) \text{ 且 } e \text{ 不是自环},\\ \ \ 0, \text{其他}.\end{cases}$$

例如, 如果 D 由下图给出



那么

$$\boldsymbol{M}(D)=\begin{bmatrix}1 & 1 & -1 & 0 & 0\\ -1 & -1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0\end{bmatrix}.$$

11.2 定理 $\boldsymbol{M}(D)$ 的行空间是键空间 $\mathcal{B}_D$. 等价地, 函数 $m_v\colon E\to\mathbb{R}$(其中 v 遍历 D 的所有顶点) 生成 $\mathcal{B}_D$.

证明 取 $g=\delta\varphi$ 为 D 上的一个位势差, 因此有

$$\begin{aligned}g(e)&=\varphi(\operatorname{fin}(e))-\varphi(\operatorname{init}(e))\\ &=\sum_{v\in V}\varphi(v)m_v(e).\end{aligned}$$

于是 $g=\sum_{v\in V}\varphi(v)m_v$, 从而 g 属于 $\boldsymbol{M}$ 的行空间.

反之, 如果 $g=\sum_{v\in V}\psi(v)m_v$ 属于 $\boldsymbol{M}$ 的行空间, 其中 $\psi\colon V\to\mathbb{R}$, 那么

$$g=\delta\psi\in\mathcal{B}.$$

□

现在定义 $\mathbb{R}^E$ 上的标量积 (或内积): 对任意 $f,g\in\mathbb{R}^E$ 定义

$$\langle f,g\rangle=\sum_{e\in E}f(e)g(e).$$

如果将数 $f(e)$ 和 $g(e)$ 看做是 f 和 g 对应于基 E 的坐标, 那么 $\langle f,g\rangle$ 就是通常定义的 f 和 g 的点积. 因为有标量积, 所以就可以定义若 $\langle f,g\rangle=0$ 则 f 和 g *正交* (orthogonal). 如果 $\mathcal{V}$ 是 $\mathbb{R}^E$ 的子空间, 那么定义 $\mathcal{V}$ 的*正交补* (orthogonal complement) $\mathcal{V}^\perp$ 为

$$\mathcal{V}^\perp=\{f\in\mathbb{R}^E\colon\langle f,g\rangle=0\text{ 对任意 }g\in\mathcal{V}\}.$$

回顾线性代数的知识

$$\dim\mathcal{V}+\dim\mathcal{V}^\perp=\dim\mathbb{R}^E=\#E. \tag{11.2}$$

更进一步地, $\left(\mathcal{V}^\perp\right)^\perp=\mathcal{V}$. 还要注意的是因为我们是在 $\mathbb{R}$ 上讨论的, 所以有 $\mathcal{V}\cap\mathcal{V}^\perp=\{0\}$. 故 $\mathbb{R}^E=\mathcal{V}\oplus\mathcal{V}^\perp$ (直和).

直觉上在基本圈和键之间有一种 "对偶性". 圈 "团结顶点", 而键 "分裂顶点". 下面的结果确切阐明了这一对偶性.

11.3 定理　*有向图 D 的圈空间与键空间有如下关系 $\mathcal{C}=\mathcal{B}^\perp$. (等价地, $\mathcal{B}=\mathcal{C}^\perp$.)*

证明　设 $f\colon E\to\mathbb{R}$, 则 f 是一个环流当且仅当对任意 $v\in V$ 都有 [为什么]

$$\sum_{e\in E}m_v(e)f(e)=0.$$

但这就是条件 $f\in\mathcal{B}^\perp$ 的另一种写法. □

11.2　圈空间与键空间的基

我们想更仔细地探讨关联矩阵 $\boldsymbol{M}(D)$, 特别地, 我们要确定 $\boldsymbol{M}(D)$ 的哪些行哪些列是线性无关的, 哪些可以生成行空间和列空间. 作为推论, 我们将确定空间 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的维数. 我们先定义 $f\colon E\to\mathbb{R}$ 的*支集* (support) $\|f\|$ 为满足条件 $f(e)\neq0$ 的边 $e\in E$ 所构成的集合.

11.4 引理 如果 $0 \neq f \in \mathcal{C}$, 那么 $\|f\|$ 包含一个无向圈.

证明 若命题不成立, 则 $\|f\|$ 中有一个顶点度为 1 [为什么], 这显然不可能. □

11.5 引理 如果 $0 \neq g \in \mathcal{B}$, 那么 $\|g\|$ 包含一个键.

证明 设 $0 \neq g \in \mathcal{B}$, 那么对某个 $\varphi: V \to \mathbb{R}$ 有 $g = \delta\varphi$. 选一个与 $\|g\|$ 中的边关联的顶点 v, 令

$$U = \{u \in V : \varphi(u) = \varphi(v)\}.$$

记 $\bar{U} = V - U$. 注意 $\bar{U} \neq \emptyset$, 否则 φ 是常数, 故 $g = 0$. 因为对任意 $e \in [U, \bar{U}]$ 都有 $g(e) \neq 0$ [为什么], 所以 $\|g\|$ 包含割集 $[U, \bar{U}]$. 由定义键就是极小割集, 故 $\|g\|$ 包含一个键. □

如果矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行向量构成 $\mathcal{B}$ 的一组基, 那么就称为 $\mathcal{B}$ 的基矩阵 (basis matrix) . 类似地可定义 $\mathcal{C}$ 的基矩阵 $\boldsymbol{C}$.

回顾定理 9.4中的记号: 设 A 是一个列数不少于行数的矩阵, 其列用一个集合 T 中的元素依次标记. 如果 $S \subseteq T$, 那么 $A[S]$ 表示由对应 S 中元素的列所构成的 A 的子矩阵. 特别地, $A[e]$ ($A[\{e\}]$ 的简写) 表示 A 中对应 e 的列. 我们得以表述关于向量空间 $\mathcal{B}$ 和 $\mathcal{C}$ 的基的第一个重要结果.

11.6 定理 设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathcal{B}$ 的基矩阵, $\boldsymbol{C}$ 是 $\mathcal{C}$ 的基矩阵. (从而 $\boldsymbol{B}$ 和 $\boldsymbol{C}$ 的列以 D 的边 $e \in E$ 标记.) 令 $S \subseteq E$, 那么:

(i) $\boldsymbol{B}[S]$ 的列向量线性无关当且仅当 S 是无圈的 (即作为无向图不包含回路).

(ii) $\boldsymbol{C}[S]$ 的列向量线性无关当且仅当 S 不包含键.

证明 子矩阵 $\boldsymbol{B}[S]$ 是列线性相关的当且仅当存在函数 $f: E \to \mathbb{R}$ 使得

$$f(e) \neq 0 \text{ 对某些 } e \in S,$$

$$f(e) = 0 \text{ 对所有 } e \notin S,$$

$$\sum_{e \in E} f(e)\boldsymbol{B}[e] = \boldsymbol{0}, \text{ 全 0 列向量}. \tag{11.3}$$

最后一个条件等价于对所有 $v \in V$ 都有 $\langle f, m_v \rangle = 0$, 即 f 是一个环流. 因此 $\boldsymbol{B}[S]$ 是列线性相关的当且仅当存在一个非零环流 f 使得 $\|f\| \subseteq S$. 由引理 11.4, $\|f\|$ (从而 S) 包含一个回路. 反之, 如果 S 包含一个回路 C 那么 $0 \neq f_C \in \mathcal{C}$ 且 $\|f_C\| = C \subseteq S$, 于是 f_C 定义了列向量之间的一个线性相关关系 (11.3). 故 $\boldsymbol{B}[S]$ 是列线性无关的当且仅当 S 是无圈的, 这就证明了 (i). (也可以用引理 9.7推导部分 (i).)

类似地可以证明 (ii). 我们留给读者作为练习. □

11.7 推论　设 $D=(V,E)$ 是有向图, 有 p 个顶点, q 条边和 k 个 (作为无向图的) 连通分支, 那么

$$\dim \mathcal{B} = p-k,$$
$$\dim \mathcal{C} = q-p+k.$$

证明　任意矩阵 X 的秩都等于它列向量的最大线性无关组的向量个数. 下设 $\boldsymbol{B}$ 是 $\mathcal{B}$ 的基矩阵. 由定理 11.6(i), $\boldsymbol{B}$ 的秩就是 E 的无圈子集的最大元素个数. 在 D 的每个连通分支 D_i 中, 最大无圈子集就是生成树, 其边数为 $p(D_i)-1$, 其中 $p(D_i)$ 是 D_i 的顶点数. 因此

$$\begin{aligned}\operatorname{rank} \boldsymbol{B} &= \sum_{i=1}^{k}(p(D_i)-1)\\ &= p-k.\end{aligned}$$

因为由等式 (11.2) 和定理 11.3可得 $\dim \mathcal{B}+\dim \mathcal{C}=\dim \mathbb{R}^E=q$, 所以

$$\dim \mathcal{C} = q-(p-k) = q-p+k.$$

(也可以直接确定 $\dim \mathcal{C}$, 论证方法与我们确定 $\dim \mathcal{B}$ 时类似.)　□

数 $q-p+k$ (也可以认作是 D 的独立圈的个数) 称为 D(或其无向版 G, 因为边的方向不起作用) 的圈数 (cyclomatic number) .

我们下个目标是描述 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$ 的确切基. 回顾一个森林 (forest) 是一个没有回路的无向图, 或等价地, 一些树的无交并. 通过忽视箭头可以将森林的定义拓展到有向图上, 即如果一个有向图没有作为无向图的回路, 那么就称为森林. 等价地 [为什么], $\dim \mathcal{C}=0$.

取 $D=(V,E)$ 的一个极大森林 T, 则 T 限制在 D 的每个连通分支上都是生成树. 如果 e 是 D 中不属于 T 的边, 那么易知 $T\cup e$ 包含唯一一个回路 C_e.

11.8 定理　设 T 如上. 则环流 f_{C_e} 的集合 S 构成圈空间 $\mathcal{C}$ 的一组基, 其中 e 遍历所有 D 中不属于 T 的边.

证明　因为对每个 $e\in E(D)-E(T)$ 仅有 f_{C_e} 在 e 上不为零, 所以环流 f_{C_e} 线性无关. 进一步地,

$$\#S = \#E(D)-\#E(T) = q-p+k = \dim \mathcal{C},$$

所以 S 是一组基.　□

11.9 例　设 D 是如下的有向图, T 的边 a,b,c 用点线表示.

对每个 C_t 按添加边的方向定向, 即 $f_{C_t}(t)=1$. 那么 $\mathcal{C}$ 对应于基 $f_{C_d}, f_{C_e}, f_{C_f}$ 的基矩阵 $\boldsymbol{C}$ 为

$$\boldsymbol{C}=\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}. \tag{11.4}$$

下一步我们希望如定理 11.8那样找到键空间 $\mathcal{B}$ 的一组基.

11.10 引理 设 T 是 $D=(V,E)$ 的极大森林. 记 $T^*=D-E(T)$ (在 D 中删除 T 的边所得的有向图), 若 D 是连通的则称之为余树 (cotree). 设 e 是 T 的一条边, 那么 $E(T^*)\cup e$ 包含唯一一个键.

证明 从 D 中删除 $E(T^*)$ 得到一个极大森林 T, 因此再删除一条边 e 会分割 D 的某个连通分支. 因此 $E(T^*)\cup e$ 包含一个键 B. 还需要证明 B 的唯一性. 从 T 中删除 e 会将 T 的某个连通分支分裂为两个连通图 T_1 和 T_2, 其顶点集分别为 S 和 $\bar{S}$. 于是 [为什么] 必然有 $B=[S,\bar{S}]$, 故 B 的唯一性成立. □

设 T 是有向图 D 的极大森林, 且 e 是 T 的边. 由上面的引理, $E(T^*)\cup e$ 包含唯一的键 B_e. 令 g_{B_e} 是对应的键空间 $\mathcal{B}$ 中的元素, 为确定性我们选取 $g_{B_e}(e)=1$.

11.11 定理 当 e 遍历 T 的所有边时, 由函数 g_{B_e} 构成的集合是键空间 $\mathcal{B}$ 的一组基.

证明 在 $e\in E(T)$ 上仅有 g_{B_e} 非零, 故函数 g_{B_e} 是线性无关的. 因为

$$\#E(T)=p-k=\dim\mathcal{B},$$

所以 g_{B_e} 构成 $\mathcal{B}$ 的一组基. □

11.12 例 设 D 和 T 如上图. 于是函数 $g_{B_a}, g_{B_b}, g_{B_c}$ 构成 $\mathcal{B}$ 的一组基. 对应的基矩阵为

$$\boldsymbol{B}=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

注意按定理 11.3所述, $\boldsymbol{B}$ 的行向量与等式 (11.4) 中矩阵 $\boldsymbol{C}$ 的行向量是正交的. 等价地, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^t=\boldsymbol{0}$, 是 3×3 的零矩阵. (一般情况下, $\boldsymbol{B}\boldsymbol{C}^t$ 会有 $q-p+k$ 行 $p-k$ 列. 此处行数与列数相等是巧合.)

从极大森林 T 得到的 $\mathcal{C}$ 和 $\mathcal{B}$ 的基矩阵 $\boldsymbol{C}_T$ 和 $\boldsymbol{B}_T$ 有一个重要的性质. 对 $m \leqslant n$, 如果一个实 $m \times n$ 矩阵 A 的每个 $m \times m$ 子矩阵的行列式都是 0, 1 或 -1, 则称为幺模的 (unimodular). 例如, 在引理 9.7中就证明了有向图 D 的邻接矩阵 $\boldsymbol{M}(D)$ 是幺模的 (其中证明了每个满子方阵的行列式展开中至多有一个非零项).

11.13 定理 设 T 是 D 的极大森林. 则 $\mathcal{C}$ 的基矩阵 $\boldsymbol{C}_T$ 和 $\mathcal{B}$ 的基矩阵 $\boldsymbol{B}_T$ 是幺模的.

证明 先考虑 $\boldsymbol{C}_T$ 的情形. 设 $\boldsymbol{P}$ 是 $\boldsymbol{C}$ 的满子方阵 (故 $\boldsymbol{P}$ 的行数列数为 $q-p+k$). 假设 $\det \boldsymbol{P} \neq 0$. 我们需要证明 $\det \boldsymbol{P} = \pm 1$. 因为 $\det \boldsymbol{P} \neq 0$, 所以由定理 11.6(ii) 知对某个极大森林 T_1 及其补 T_1^* 有 $\boldsymbol{P} = \boldsymbol{C}_T[T_1^*]$. 注意矩阵 $\boldsymbol{C}_T[T_1^*]$ 的行以 T^* 标记而列以 T_1^* 标记. 类似地, 基矩阵 $\boldsymbol{C}_{T_1}$ 的行以 T_1^* 标记而列以 E (D 的边集) 标记. 从而可以定义矩阵的积

$$\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}_T[T_1^*]\boldsymbol{C}_{T_1},$$

这个矩阵的行以 T^* 标记而列以 E 标记.

注意矩阵 $\boldsymbol{Z}$ 是圈空间 $\mathcal{C}$ 的一个基矩阵, 因为它的行是基矩阵 $\boldsymbol{C}_{T_1}$ 的行的线性组合, 又由 $\boldsymbol{C}_T[T_1^*]$ 的可逆性知 $\boldsymbol{Z}$ 是满秩的. 现有 $\boldsymbol{C}_{T_1}[T_1^*] = I_{T_1^*}$ (以 T_1^* 标记的单位矩阵), 故 $\boldsymbol{Z}[T_1^*] = \boldsymbol{C}_T[T_1^*]$. 从而 $\boldsymbol{Z}$ 与基矩阵 $\boldsymbol{C}_T$ 在列 T_1^* 上相同. 于是 $\boldsymbol{Z} - \boldsymbol{C}_T$ 的行是支集为子集 T_1 的环流. 因为 T_1 无圈, 所以由引理 11.4 知唯一的这样的环流必处处为 0, 故 $\boldsymbol{Z} = \boldsymbol{C}_T$.

上述论证就是证明了

$$\boldsymbol{C}_T[T_1^*]\boldsymbol{C}_{T_1} = \boldsymbol{C}_T.$$

将两边限制在 T^* 可得

$$\boldsymbol{C}_T[T_1^*]\boldsymbol{C}_{T_1}[T^*] = \boldsymbol{C}_T[T^*] = I_{T^*}.$$

取行列式得

$$\det(\boldsymbol{C}_T[T_1^*])\det(\boldsymbol{C}_{T_1}[T^*]) = 1.$$

因为所有用到的矩阵都是整数矩阵, 所以上面的行列式也是整数. 于是

$$\det \boldsymbol{C}_T[T_1^*] = \pm 1,$$

正如所证.

类似可得对 $\boldsymbol{B}_T$ 的证明. □

11.3 电子网络

我们将简短说明一下如上讨论与电子网络理论之间的联系. 设 D 是有向图, 为简便起见我们假定 D 是连通的 (connected) 和无自环的 (loopless). 假设在每条边 e 有从 $\operatorname{init} e$ 到

fin e 的电压 (电势) V_e, 和在 e 的方向上的电流 I_e (故负电流 I_e 标示了在与 e 相反方向上的电流 $|I_e|$). 想象 V 和 I 是边上的函数, 即向量空间 $\mathbb{R}^E$ 中的元素. 与量 V_e 和 I_e 相关的有三个基本法则.

Kirchhoff 第一法则 $I \in \mathcal{C}_D$. 换言之, 流入一个顶点的电流与流出的电流相等. 符号表示为, 对所有顶点 $v \in V$ 有

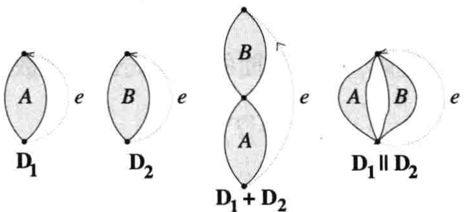
$$\sum_{\substack{e \\ \text{init}\, e=v}} I_e = \sum_{\substack{e \\ \text{fin}\, e=v}} I_e.$$

Kirchhoff 第二法则 $V \in \mathcal{C}_D^{\perp} = \mathcal{B}$. 换言之, 在考虑定向的意义下, 沿着任何回路 (电子工程中也称 “loops”, 但不表示自环) 的电压和为 0.

Ohm 法则 如果边 e 有电阻 $R_e > 0$, 那么 $V_e = I_e R_e$.

电子网络理论中处理以上三个法则[①] 的中心问题可如下描述: 在 $3q$ 个量 V_e, I_e, R_e 中需要指定哪些量来唯一确定所有其他的量, 以及如何才能优美并快速地找到或保证解答? 这里我们仅关心一个或许是实际应用中最重要的特例. 换句话说, 假设我们在边 e_q 处应用电压 V_q, 在其他边 $e_1, \ldots, e_{q-1}$ 处有电阻 $R_1, \ldots, R_{q-1}$. 设 V_i, I_i 是边 e_i 处的电压与电流. 我们希望用 V_q 和 $R_1, \ldots, R_{q-1}$ 表示 V_i 和 I_i. 通过 “物理直觉” 应该有唯一解, 因为我们可以建一个满足问题中指定条件的网络. 注意如果有量 V_i, I_i, R_i 满足如上三个网络法则, 那么对任意标量 α 量 $\alpha V_i, \alpha I_i, R_i$ 也是一组解. 这意味着我们也可以假定 $V_q = 1$, 因为我们可以将所有电压电流乘以适当的值以得到想要的 V_q 值.

作为计算一个网络的总电阻的简单方法的说明, 下图展示了两个网络 D_1 和 D_2 的串联 (series connection) $D_1 + D_2$ 和并联 (parallel connection) $D_1 \parallel D_2$ 的概念, 其中在一个特别的边 e 处应用一个电压.



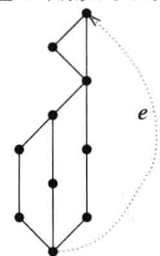
当应用电压 $V_q > 0$ 时电流将沿着边 e_q 从高电势流往低电势. 于是 $V_q/I_q < 0$, 因此我们定义网络 D 对应特殊边 e 的总电阻 (total resistance) $R(D)$ 为 $R(D) = -V_q/I_q$. 众所周知, 也容易从三个网络法则推知

$$R(D_1 + D_2) = R(D_1) + R(D_2),$$

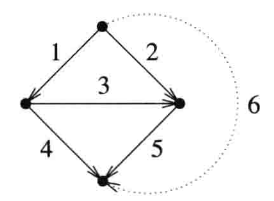
① 当然如果引入动态 (dynamic) 网络因素如电容器、交错电流等, 情况会变得更为复杂.

$$\frac{1}{R(D_1 \parallel D_2)} = \frac{1}{R(D_1)} + \frac{1}{R(D_2)}.$$

以单个边为基本元素, 通过一系列的串联和并联构建的网络称为串并联网络 (series-parallel network). 下图是一个例子, 其中特殊边 e 用从下到上的断线表示.



最简单的不是串并联网络的网络如下图所示, 称为 Wheatstone 电桥 (bridge). (箭头的方向是任选的.) 我们将以此网络作为以下讨论的主要例子.



现在回来探讨任意连通的无自环有向图 D, 它在边 e_i 处具有电流 I_i, 电压 V_i 和电阻 R_i. 回顾我们固定了 $V_q = 1$ 和 $R_1, \ldots, R_{q-1}$. 设 T 是 D 的生成树. 因为 I 是一个电流当且仅当 (由定理 11.3 和 Kirchhoff 第一法则) 它与键空间 $\mathcal{B}$ 正交, 所以 $\mathcal{B}$ 的任一组基定义了一个完全的且极小的 I_i 所满足的线性关系的集合 (即 I 与基元素正交的关系). 特别地, 基矩阵 $\boldsymbol{B}_T$ 定义了这样的关系集. 例如, 如果 D 是如上的 Wheatstone 电桥, 且 $T = \{e_1, e_2, e_5\}$, 那么我们通过向 T^* 依次添加 T 的边 e_1, e_2, e_5 得到如下关系:

$$\begin{aligned} I_1 - I_3 - I_4 &= 0, \\ I_2 + I_3 + I_4 + I_6 &= 0, \\ I_4 + I_5 + I_6 &= 0. \end{aligned} \tag{11.5}$$

这三个 $(= p - 1)$ 等式给出了 I_i 满足的所有关系, 并且这些等式是线性无关的.

类似地, 如果 V 是电压, 那么它与圈空间 $\mathcal{C}$ 正交. 因此 $\mathcal{C}$ 的任一组基定义了一个完全的且极小的 V_i 所满足的线性关系的集合 (即 V 与基元素正交的关系). 特别地, 基矩阵 C_T 定义了这样的关系集. 继续我们的例子, 通过向 T 依次添加 T^* 的边 e_3, e_4, e_6 得到如下关系:

$$V_1 - V_2 + V_3 = 0,$$

$$
\begin{aligned}
V_1 - V_2 + V_4 - V_5 &= 0, \\
V_2 + V_5 &= 1.
\end{aligned} \tag{11.6}
$$

这三个 $(= q - p + k)$ 等式给出了 V_i 满足的所有关系，并且这些等式是线性无关的.

此外, Ohm 法则给出 $q-1$ 个等式 $V_i = R_i I_i$, $1 \leqslant i \leqslant q-1$. 我们共有 $(p-k)+(q-p+k)+(q-1) = 2q-1$ 个等式、$2q-1$ 个未知数 I_i $(1 \leqslant i \leqslant q)$ 和 V_i $(1 \leqslant i \leqslant q-1)$. 进一步地, 利用已知的事实, 即仅与 I_i 有关 (类似地仅与 V_i 有关) 的等式是线性无关的, 容易看出这 $2q-1$ 个等式是线性无关的. 因此这个有 $2q-1$ 个等式, $2q-1$ 个未知数的系统有唯一解. 这样问题就简化为直接的线性代数问题. 然而, 有可能确切地描述解答. 这里仅给出总电阻 $R(D) = -V_q/I_q = -1/I_q$ 的公式.

将 $2q-1$ 个等式写成 $(2q-1) \times 2q$ 矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的形式. 矩阵的列用 $I_1, I_2, \ldots, I_q$, V_1, $V_2 \ldots, V_q$ 依次标记. 矩阵的最后一列, 即第 V_q 列, 记录了等式的常数项. 矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的行对应的先是 I_i 的等式, 接着是 V_i 的等式, 最后是 Ohm 法则. 在 Wheatstone 电桥的例子中, 我们得到矩阵

$$
\boldsymbol{K} = \begin{array}{|ccccc|c|ccccc|c|}
I_1 & I_2 & I_3 & I_4 & I_5 & I_6 & V_1 & V_2 & V_3 & V_4 & V_5 & V_6 \\
\hline
1 & 0 & -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 & -1 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\
\hline
R_1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & R_2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & R_3 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & R_4 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & R_5 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0
\end{array}.
$$

我们希望用 Cramer 法则求解 I_q. 称由除最后一列的所有列构成的子矩阵为 X. 设 Y 是将 X 的 I_q 列替换为 $\boldsymbol{K}$ 的最后一列所得的矩阵. Cramer 法则断言

$$
I_q = \frac{\det Y}{\det X}.
$$

我们按前 $p-1$ 行应用 Laplace 展开来计算 $\det X$. 换句话说,

$$
\det X = \sum_S \pm \det(X[[p-1], S]) \cdot \det(X[[p-1]^c, \bar{S}]), \tag{11.7}
$$

其中 (a) S 遍历列标号的所有 $(p-1)$ 元子集, (b) $X[[p-1],S]$ 表示 X 中由前 $p-1$ 行和 S 列中的元素所构成的子矩阵, (c) $X[[p-1]^c,\bar{S}]$ 表示 X 中由后 $2q-p$ 行且不在 S 列中的元素所构成的子矩阵. 为使 $\det(X[[p-1],S])\neq 0$, 必须选 $S=\{I_{i_1},\ldots,I_{i_{p-1}}\}$, 其中 $\{e_{i_1},\ldots,e_{i_{p-1}}\}$ 是一个生成树 T_1 (由定理 11.6(i)). 此时由定理 11.13, $\det(X[[p-1],S])=\pm 1$. 如果 $I_q\notin S$, 那么 $X[[p-1]^c,\bar{S}]$ 的 I_q 列就是零. 因此要在 (11.7) 中得到非零项, 必须有 $e_q\in S$. 矩阵 $X[[p-1]^c,\bar{S}]$ 将在前 $q-p+1$ 列的每一列中有一个非零元, 即电阻 R_j 行, 其中 e_j 不是 T_1 的边. 这占据了 $X[[p-1]^c,\bar{S}]$ 最后 $q-1$ 行中的 $q-p+1$ 个元. 最后 $q-1$ 行中剩下的 $p-2$ 行每行只有一个非零元可选, 即在 V_j 列中的 -1, 其中 e_j 是 T_1 中除 e_q 外的边. 因此我们需要从第 p 到 q 行以及标记为 V_j 的列中选取剩下的 $q-p+1$ 个元, 其中要求 e_j 不是 T_1 的边. 由定理 11.6(ii) 和 11.13, 这个剩下的子矩阵有行列式 ± 1. 于是可得

$$\det\left(X[[p-1],S]\right)\cdot\det\left(X[[p-1]^c,\bar{S}]\right)=\pm\prod_{e_j\notin E(T_1)}R_j.$$

从而由 (11.7) 得

$$\det X=\sum_{T_1}\pm\left(\prod_{e_j\notin E(T_1)}R_j\right), \tag{11.8}$$

其中 T_1 遍历 D 的所有包含 e_q 的生成树. 仔细分析符号 (此处省略) 就可以证明 (11.8) 中所有符号都是负的, 故我们最终得到显著的公式

$$\det X=-\sum_{\text{包含 } e_q \text{ 的生成树 } T_1}\ \prod_{e_j\notin E(T_1)}R_j.$$

例如, 若 D 是如上的 Wheatstone 电桥, 且我们简记 $R_1=a$, $R_2=b$, $R_3=c$, $R_4=d$, $R_5=e$, 那么

$$-\det X=abc+abd+abe+ace+ade+bcd+bde+cde.$$

现在假设在矩阵 X 中将 I_q 列替换为矩阵 $\boldsymbol{K}$ 的 V_q 列, 得到矩阵 Y. 因为新列中有唯一非零元, 所以 $\det Y$ 的展开式中任意非零项必选此非零元. 剩下的论证与计算 $\det X$ 时相同, 除了我们选择 S 来对应不包含 e_q 的生成树 T_1. 因此我们得到

$$\det Y=\sum_{\text{不包含 } e_q \text{ 的生成树 } T_1}\ \prod_{\substack{e_j\notin E(T_1)\\ e_j\neq e_q}}R_j.$$

例如对 Wheatstone 电桥有

$$\det Y=ac+ad+ae+bc+bd+be+cd+ce.$$

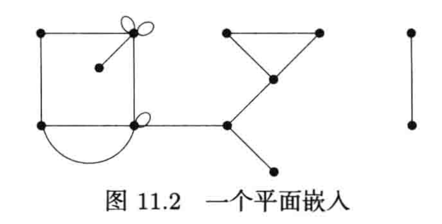


图 11.2　一个平面嵌入

回顾 $I_q = \det(Y)/\det(X)$, 网络的总电阻为 $-1/I_q$. 汇总以上结果可得我们关于电子网络的主要结果.

11.14 定理　在如上描述的情况下, 网络的总电阻为

$$R(D) = -\frac{1}{I_q} = -\frac{\displaystyle\sum_{\text{包含 } e_q \text{ 的生成树 } T_1} \prod_{e_j \notin E(T_1)} R_j}{\displaystyle\sum_{\text{不包含 } e_q \text{ 的生成树 } T_1} \prod_{\substack{e_j \notin E(T_1) \\ e_j \neq e_q}} R_j}.$$

11.15 推论　如果电阻 $R_1, \ldots, R_{q-1}$ 都等于 1, 那么网络的总电阻为

$$R(D) = -\frac{1}{I_q} = \frac{\text{包含 } e_q \text{ 的生成树个数}}{\text{不包含 } e_q \text{ 的生成树个数}}.$$

特别地, 如果 $R_1 = \cdots = R_{q-1} = 1$, 那么总电阻的既约式 a/b 具有一个古怪的性质: D 的生成树的个数 $\kappa(D)$ 能被 $a+b$ 整除.

11.4　平面图 (概述)

如果一个图 G 可以在平面 $\mathbb{R}^2$ 上画出而没有相交的边, 那么称它是*平面的* (planar). G 的这种画法称为一个*平面嵌入* (planar embedding). 图 11.2 是一个平面嵌入的例子. 本节我们陈述关于平面图的键空间和圈空间的基本结果. 证明相对直接故省略.

如果在 G 的平面嵌入中将顶点和边从 $\mathbb{R}^2$ 中删除, 那么就得到一些开集的无交并, 这些开集称为 G 的*面* (face) (或*区域* (region)). (更确切地, 这些开集是 G 的平面嵌入所拥有的面. 如果不导致混淆的话, 我们通常不区分平面图和它的平面嵌入.) 记 $R = R(G)$ 是 G 的面集, 仍用 $V(G)$ 和 $E(G)$ 分别表示 G 的顶点集和边集.

注　如果 G 是简单 (无自环无重边) 平面嵌入, 那么此嵌入可以用直线边来实现, 并保持面 (看做沿着面的边缘移动时所经过的点与边的序列).

平面嵌入图 G 的*对偶* (dual) G^* 是以 $R(G)$ 为顶点集, 以 $E^*(G) = \{e^* : e \in E(G)\}$ 为边集的图. 设 e 是 G 的边, 其两边的面为 r 和 r' (可能会有 $r = r'$, 图 11.2 中有 5 个这样

的边). 那么定义 e^* 连接 r 和 r'. 我们总可以得到 G^* 的平面画法, 使得 e 和 e^* 相交一次. 如果 G 是连通的那么 G^* 的每一个面恰好包含 G 的一个 (非孤立的) 顶点, 而且 $G^{**} \cong G$. 对任意平面嵌入图 G, 其对偶图 G^* 是连通的. 从而 $G \cong G^{**}$ 当且仅当 G 是连通的. 一般地, $G^* \cong G^{***}$ 总成立. 图 11.3中的图 G^* 是图 11.2 中图 G 的对偶, 其中 G^* 中的顶点用开圆表示, 边用断线表示.

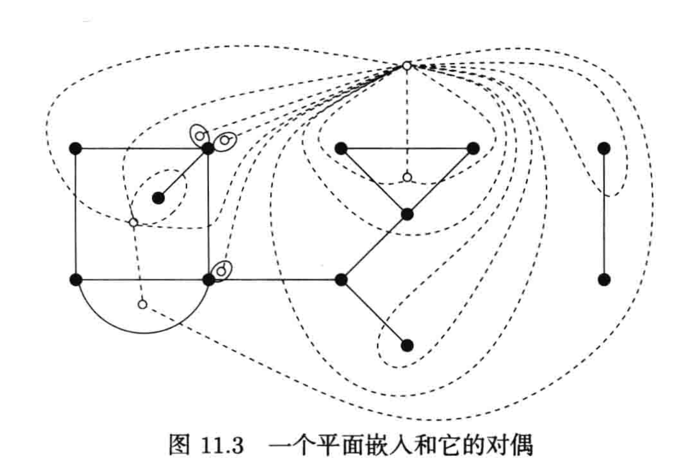
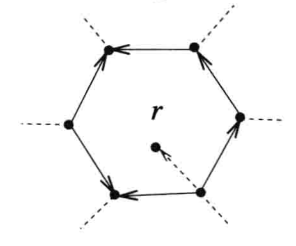


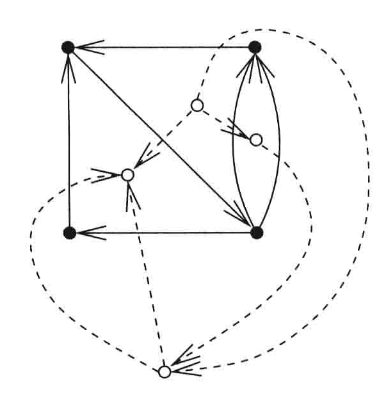
图 11.3 一个平面嵌入和它的对偶

11.16 例 令 G 由两个不相交的边构成. 则 G^* 有一个顶点两个自环, 而 G^{**} 是一个三顶点路. G^* 的无界面包含 G 的两个顶点, 故 $G^{**} \ncong G$.

将平面图 G 的边任意定向得到有向图 D. 令 r 是 D 的一个内 (即有边界的) 面. r 的一个外部边 (outside edge) 是边 e, 满足 r 在该边的一侧, 而一个不同的 (different) 面位于另一侧. 对任意内面 r, 其外部边定义了一个环流 (在下图中用实边表示), 并且 (当 r 遍历所有 D 的内面时) 这些环流构成 G 的圈空间 $\mathcal{C}_G$ 的一组基.



给定 G 的定向 D, 对 G^* 的边如下定向: 当沿着边 e 的定向方向走动时, e^* 指向我们的右方 (right).



11.17 定理　设 $f\colon E(G)\to\mathbb{R}$. 定义 $f^*\colon E(G^*)\to\mathbb{R}$ 为 $f^*(e^*)=f(e)$. 那么

$$f\in\mathcal{B}_G\Leftrightarrow f^*\in\mathcal{C}_{G^*},$$
$$f\in\mathcal{C}_G\Leftrightarrow f^*\in\mathcal{B}_{G^*}.$$

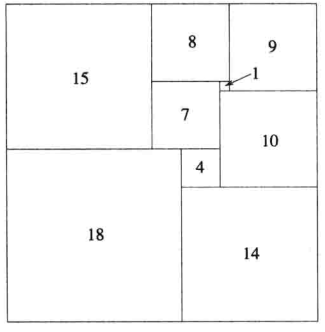
11.18 命题　设 G 是连通的, 则集合 S 是 G 的生成树 T 的边集当且仅当 $S^*=\{e^*:e\in S\}$ 是 G^* 的余树的边集.

11.19 推论　若 G 是连通的, 则 $\kappa(G)=\kappa(G^*)$.

对非平面图仍有 "对偶" 的说法, 但其对偶不再是图而是一种被称为拟阵 (matroid) 的结构. 拟阵理论是一个繁荣的课题, 可以看做是线性代数的组合抽象.

11.5　方块划分的正方形

一个方块划分的长方形 (squared rectangle) 是一个划分为有限个 (但超过一个) 正方形的长方形. 如果它的正方形边长两两不同, 则称此方块划分的长方形为完美的 (perfect). 完美方块划分的长方形最早于 1936 年被发现, 是由 9 个正方形组成的大小为 33×32 的长方形:



自然产生的问题是: 是否存在一个完美方块划分的正方形? 1939 年 Sprague 发现了一个简单的例子, 它有 55 个正方形. 后来 Brooks, Smith, Stone 和 Tutte 等人发展了网络理论的方法. 接下来我们介绍他们的方法.

一个方块划分的长方形的 Smith 图 D 是一个有向图, 其顶点是方块划分长方形中的水平线段, 其边是正方形, 方向是从上往下. 最高顶点 (对应最初的长方形的顶边) 和最低顶点 (对应底边) 称为极点 (pole). 每条边用其对应的正方形的边长来标号. 图 11.4 展示了上图中 (完美) 方块划分的长方形的 Smith 图.

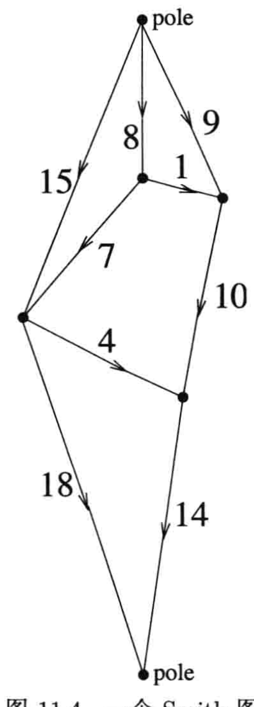


图 11.4 一个 Smith 图

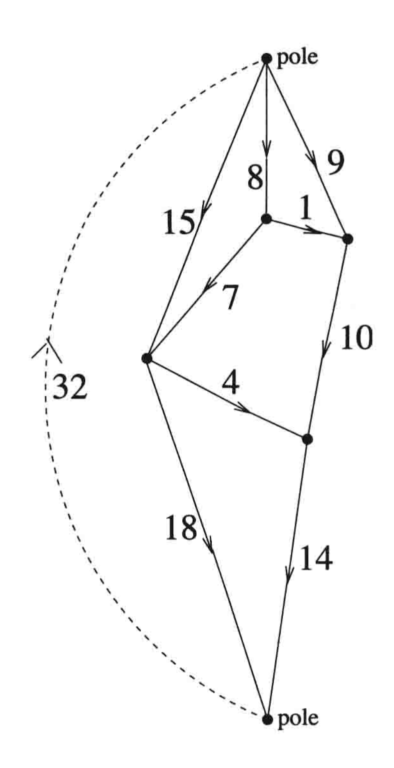
下面关于 Smith 图的结论可以直接验证.

11.20 定理 (a) 如果令 I_e 和 V_e 等于边 e 的标号, 那么除两极外 Kirchhoff 的两个法则处处成立 (故 $R_e = 1$).

(b) Smith 图是平面的且其平面实现无需将两极分离. 从下往上用一条边连接两极可得一个 3-连通图, 即一个连通图满足在任意去掉一个或两个点时仍保持连通.

称定理 11.20 中的 3-连通图为方块划分的 $a \times b$ 长方形的增广 (extended) Smith 图. 如果对连接两极的新边 e_1(方向是从下往上) 规定电流 $I_{e_1} = b$ 和电压 $V_{e_1} = -a$, 那么 Kirchhoff 的两个法则对所有 (all) 顶点成立. 下图显示了对应图 11.4的增广 Smith 图, 其中

新边 e_1 用电流 I_{e_1} 标记.

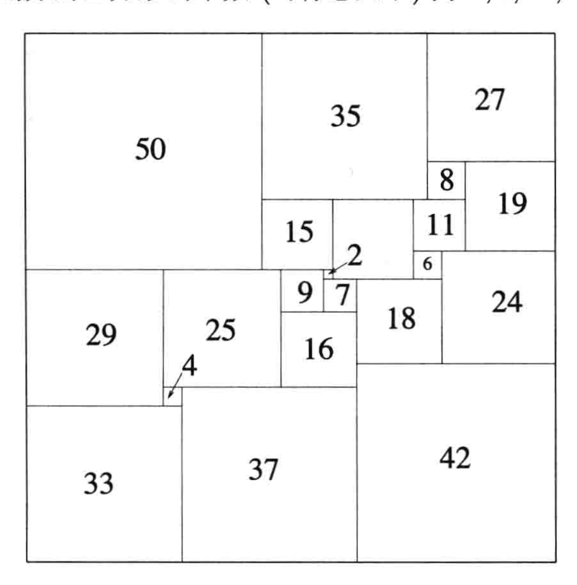


于是我们就有了寻找完美方块划分的长方形和正方形的秘诀: 开始罗列所有 3-连通平面图. 选一条边 e_1 应用电压 V_1, 对其他边 e 赋值电阻 $R_e = 1$. 求解 $I_e\ (= V_e)$ 从而得到一个方块划分的长方形, 并希望其中一个是正方形. Brooks 等人发现了一个 112×75 的长方形例子 Γ, 由 14 个正方形组成. 该例子作为拼图游戏交给了 Brooks 的妈妈, 她发现了一个不同的解法 Δ! 于是我们就找到了一个 (不完美的) 方块划分的正方形:

Δ	75 x 75
112 x 112	Γ

基于这个想法, Brooks 等人最终找到了两个具有 13 个正方形的 422×593 完美长方形, 所有 26 个方块的边长都不同. 将它们如上放置就得到了一个完美方块划分的正方形. 这

个例子有两个缺点: (a) 它包含一个小的完美方块划分的长方形 (因此不简单 (simple)); (b) 它包含了一个 "交点" (四个正方形交于一点). 他们最终找到了一个没有以上缺点的具有 69 个正方形的完美正方形. 现在知道 (感谢计算机) 完美方块划分的正方形的最小阶 (正方形的个数) 是 21. 它是唯一的而且恰好是简单的和无交点的. 请见下图. 对 $n \geqslant 21$, 已知的阶为 n 的简单完美方块划分的正方形的个数 (对称意义下) 为 $1, 8, 12, 26, 160, 441, 1152, \ldots$.



第 11 章注记

本章发展的圈空间和键空间的理论源自 1847 年 G. Kirchhoff 的开创性工作 [63]. 这里给出的定理 11.13 的证明归功于 1965 年 W. T. Tutte 的文章 [117]. 关于 Tutte 对方块划分正方形这一课题所做贡献的历史请参见 Martin Gardner [44] 撰写的 *Scientific American* 专栏. 也可参考 Tutte 的另一篇文章 [118]. Kazarinoff 和 Weitzenkamp [62] 对此课题做了更进一步的综述.

第 11 章练习

1. (a) 设 C_n 是 n 维立方体的图. 找出 C_n 的圈空间与键空间的维数. 是否存在一个三条边上的 (对应 C_n 某个定向的) 环流?

(b) 证明 (对应 C_n 某个定向的) 圈空间 $\mathcal{C}_{C_n}$ 由环流 f_C 生成, 其中 C 遍历长度为 4 的回路.

2. 什么样的有向图具有这样的性质: 每一个非空边子集都是一个割集?
3. 完全图 K_p 的不包含键的边集最多包含多少条边? 这样的集合有多少个?
4. (*) 有限有向图 D 的圈空间 $\mathcal{C}_D$ 和键空间 $\mathcal{B}_D$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上的. 但也可以定义在任意域 K 上, 甚至是正特征的域上. 证明这两个空间的维数对任意域 K 都保持一致, 即 $\dim \mathcal{C}_D = q - p + k$ 和 $\dim \mathcal{B}_D = p - k$.
5. (a) 一个图 G 是*边传递的* (edge-transitive) 如果它的自同构群 $\mathrm{Aut}(G)$ 在边上是传递的, 即对 G 的任意两条边 e, e', 存在一个自同构 φ 将 e 映为 e'. 例如, 立方体图 C_n 是边传递的. 一个边传递图是否也是点传递的? 反过来点传递图是否是边传递的? 如果仅考虑简单图 (无自环无重边), 是否会影响答案?

   (b) 假设 G 是边传递的, 有 p 个顶点和 q 条边. 在一条边 e 上放一个一伏的电池, 其他所有边有电阻一欧姆. 用 p 和 q 表示网络的总电阻 $R_e = -V_e/I_e$.
6. 设 D 是一个有 q 条边的无自环连通有向图. 令 T 是 D 的生成树, 记 $\mathcal{C}$ 是得自 T 的圈空间, $\boldsymbol{C}$ 是对应的基矩阵, 类似地, $\boldsymbol{B}$ 与 (定理 11.8 和定理 11.11 描述的) 键空间对应.

   (a) (*) 证明 $\det \boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^t = \det \boldsymbol{B}\boldsymbol{B}^t = \kappa(D)$, 其中 $\kappa(D)$ 是 D 的 (忽视边的方向) 的生成树的个数.

   (b) (*) 设
$$Z = \begin{bmatrix} \boldsymbol{C} \\ \boldsymbol{B} \end{bmatrix}$$
   是 $q \times q$ 矩阵. 证明 $\det Z = \pm\kappa(D)$.
7. (困难) 设 M 是一个每两列都线性无关的 $m \times n$ 实幺模矩阵. 证明 $n \leqslant \binom{m}{2}$.
8. 设 D 是边为 $e_1, \ldots, e_q$ 的平面电子网络. 对 $1 \leqslant i \leqslant q-1$, 在 e_i 处放置电阻 $R_i = 1$, 在 e_q 处放置电压 $V_q = 1$. 设 D^* 是对偶电子网络, 在 e_i^* 处具有相同的电阻 R_i, 在 e_q^* 处有电压 V_q^*. 问总电阻 $R(D)$ 和 $R(D^*)$ 之间有什么联系?
9. 设 D 是一个方块划分的长方形的增广 Smith 图, 具有如书中定义的电流 I 和电压 V. 事实 $\langle I, V\rangle = 0$ 的 "几何" 意义是什么?
10. 设 D 是一个方块划分的 $a \times b$ 长方形的增广 Smith 图. 证明 D 的生成树的个数被 $a + b$ 整除.

第 12 章　代数组合中的杂项珍宝

12.1　百名囚犯

一个邪恶的典狱官在管理 100 个 (不重名的) 囚犯. 他在一个房间里将 100 个盒子摆成一排. 每个盒子中有一个不同囚犯的名字. 囚犯们依次进入房间, 每次进入一人, 选择打开 50 个盒子. 如果有一名囚犯无法在其打开的盒子中看到自己的名字, 那么所有囚犯都将被处决. 囚犯们被允许在第一人进入房间前进行一次讨论, 但之后不允许进一步交流. 一个囚犯也不能留给其他囚犯任何信息. 特别地, 一旦一个囚犯离开房间, 所有盒子都会关闭. 如果所有囚犯都随机地选择 50 个盒子, 那么每人的成功率是 1/2, 所以他们不被处决的概率是 2^{-100}, 这个机会很不好. 是否有一个策略来增加他们成功的机会呢? 最好的策略是什么?

不难看出囚犯们可以使成功率超过 2^{-100}. 例如, 假设第一个囚犯打开前 50 个盒子, 第二个囚犯打开后 50 个. 如果第一个囚犯成功了 (概率是 1/2), 那么第一名囚犯的名字必然不在第二名囚犯打开的盒子中, 因此第二名囚犯成功的概率是 50/99. 每一对囚犯可以用这个策略, 这使得总成功率增加为 $(25/99)^{50}$, 仍然是一个极小的数. 他们是否能使成功率有重大的提高呢? 理解这个问题的关键是意识到囚犯们不需要事先选择好打开哪些盒子. 囚犯可以在已经打开的盒子的基础上选择打开下一个盒子.

12.1 定理　*有一个策略成功率达到*

$$1-\sum_{j=51}^{100}\frac{1}{j}=0.3118278207\cdots.$$

证明　囚犯们用自己喜欢的方法给自己分派数字 $1,2,\ldots,100$, 每名囚犯分派不同的数字. 囚犯们记住他们的数字. 他们将这些排成一排的盒子从左到右用 $1,2,\ldots,100$ 标号. 拥有数字 k 的囚犯先打开盒子 k. 如果他看到了自己的名字, 那么他可以获得临时缓解, 吸一口气, 让下一个囚犯进来. 否则第一个囚犯将看到另一名囚犯的名字, 设该名字对应数字 n_1. 那么他打开盒子 n_1 并重复此过程, 因此每当他打开不包含自己名字的盒子 B, 他打开的下一个盒子就是盒子 B 中的名字所拥有的数字.

这个策略的成功率是多少呢? 假设盒子 i 中的名字对应拥有数字 $\pi(i)$ 的囚犯. 从而 π 是 $1,2,\ldots,100$ 的一个置换. 囚犯 i 打开的盒子中的名字所对应的囚犯拥有数字 $\pi(i)$, $\pi^2(i)$,

$\pi^3(i)$ 等. 如果 k 是 π 中包含 i 的轮换的长度, 那么这个囚犯将在打开第 k 个盒子时看到自己的名字, 只要 $k \leqslant 50$ 这种情况总能发生. 因此所有囚犯都能看到自己的名字当且仅当 π 的每个轮换的长度至多是 50. 如果 π 不具有这个性质, 那么它恰好包含一个长度为 $r > 50$ 的轮换. 有 $\binom{100}{r}$ 方法选择此轮换中的元素, $(r-1)!$ 种方法排成一个轮换. 然后有 $(100-r)!$ 种方法来安排 π 中的其他元素. 故 $\pi \in \mathfrak{S}_{100}$ 中有长度为 $r > 50$ 的轮换的置换个数为

$$\binom{100}{r}(r-1)!(100-r)! = \frac{100!}{r}.$$

(有更巧妙的办法得到这个结果.) 因此成功的概率, 即置换 π 没有长度超过 50 的轮换的概率是

$$1 - \frac{1}{100!}\sum_{r=51}^{100}\frac{100!}{r} = 1 - \sum_{r=51}^{100}\frac{1}{r},$$

得证. □

如果对 $2n$ 而不是 100 个囚犯应用上述论证, 那么所得成功概率为

$$1 - \sum_{r=n+1}^{2n}\frac{1}{r} = 1 - \sum_{r=1}^{2n}\frac{1}{r} + \sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r}.$$

从微积分的知识知存在常数 $\gamma = 0.577\ 215\ 665\cdots$, 称为欧拉常数 (Euler's constant), 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{r} - \log n\right) = \gamma.$$

于是当 $n \to \infty$ 时, $2n$ 个囚犯的成功率为

$$\lim_{n\to\infty}(1 - \log 2n + \log n) = 1 - \log 2 = 0.306\ 852\ 819\ 4\cdots.$$

很令人惊奇的是, 不管有多少个囚犯, 他们总可以使成功率超过 30%![①]

注 可以证明上面的策略事实上是最优的 (optimal), 即没有策略可以获得更高的成功率. 但是证明不太简单.

12.2 奇数镇

奇数镇 (Oddtown) 的村庄共有居民 n 人. 奇数镇的住户们喜欢组成社团. 每个社团有奇数个成员, 每对社团的公共成员数为偶数 (允许没有).

① 读者应自行验证成功概率随着 n 的增大而递减. ——译者注

12.2 定理 至多有 n 个社团.

证明 设 k 是社团的个数. 如下定义一个二元域 $\mathbb{F}_2$ 上的矩阵 $\boldsymbol{M} = (M_{ij})$. $\boldsymbol{M}$ 的行用社团 C_i 依次标记, 列用 Oddtown 的居民 x_j 依次标记. 令

$$M_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j \in C_i, \\ 0, & \text{其他}. \end{cases}$$

矩阵 $\boldsymbol{M}$ 称为对应社团和其成员的关联矩阵 (incidence matrix).

一般地, 设 S 是 $[n]$ 的子集, $\chi_S \in \mathbb{Z}^n$ 是 S 的特征向量 (characteristic vector), 即 $\chi_S = (a_1, \ldots, a_n)$, 其中

$$a_i = \begin{cases} 1, & i \in S, \\ 0, & i \notin S. \end{cases}$$

如果 T 是 $[n]$ 的另一个子集, 那么关键事实是 χ_S 和 χ_T 的标量 (点) 积为 $\chi_S \cdot \chi_T = \#(S \cap T)$. 所以如果现在我们在 $\mathbb{F}_2$ 上操作, 那么

$$\chi_S \cdot \chi_T = \begin{cases} 1, & \text{若 } \#(S \cap T) \text{ 是奇数}, \\ 0, & \text{若 } \#(S \cap T) \text{ 是偶数}. \end{cases} \tag{12.1}$$

令 $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t$ 是 $k \times k$ 矩阵. 由等式 (12.1) 和每个社团有奇数个成员的假设, 我们可以看到 $\boldsymbol{A}$ 的主对角线元素都为 1. 类似地, $\boldsymbol{A}$ 的非对角线元素都是 0, 从而 $\boldsymbol{A} = I_k$, 是 $k \times k$ 单位矩阵. 于是有 $\operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = k$.

回顾如果 B 是 $k \times m$ 矩阵 C 是 $m \times n$ 矩阵 (在某个域上), 那么 $\operatorname{rank}(BC) \leqslant \operatorname{rank}(B)$ (同样有 $\operatorname{rank}(BC) \leqslant \operatorname{rank}(C)$), 因为对任何矩阵 D, $\operatorname{rank}(D) = \dim \operatorname{image}(D)$. 于是, 由 $\boldsymbol{M}$ 有 n 列知,

$$n \geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{M}) \geqslant \operatorname{rank}(\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t) = \operatorname{rank}(\boldsymbol{A}) = k. \qquad \square$$

虽然定理 12.2 不用线性代数也可以证明, 但是证明不简单.

12.3 K_n 的完全二部划分

图 12.1 展示了将完全图 K_4 的六条边 (按边标号) 划分为三个完全二部图 $K_{3,1}$, $K_{2,1}$ 和 $K_{1,1}$ 的边集. 显然我们可以推广这个构造, 将 K_n 的边 $E(K_n)$ 划分为 $n-1$ 个完全二部图的边集. 特别地, 令 E_1 是与固定顶点 v 相连的边的集合, 那么 E_1 就是完全二部图 $K_{n-1,1}$ 的边集. 从 $E(K_n)$ 中删去 E_1 并应用归纳法, 就可以将 $E(K_n)$ 划分为 $K_{n-1,1}$, $K_{n-2,1}, \ldots,$

$K_{1,1}$ 的边集. 自然的问题是 $E(K_n)$ 是否可以划分为少于 (fewer) $n-1$ 个完全二部图的边集.

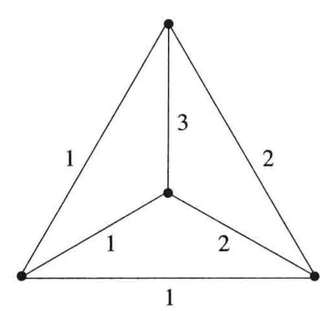


图 12.1　K_4 的边集分解为三个完全二部图

12.3 定理　如果 $E(K_n)$ 是 m 个完全二部图的边集的无交并, 那么 $m \geqslant n-1$.

证明　设 $E(K_n) = E(B_1) \dot\cup E(B_1) \dot\cup \cdots \dot\cup E(B_m)$ (无交并), 其中 B_k 是顶点二分为 (X_k, Y_k) (故 $X_k \cap Y_k = \emptyset$) 的完全二部图. 对 $1 \leqslant i \leqslant n$, 定义 $n \times n$ 矩阵 A_k 如下

$$(A_k)_{ij} = \begin{cases} 1,\ i \in X_k,\ j \in Y_k, \\ 0,\ \text{其他}. \end{cases}$$

因为 A_k 的所有非零行都相等, 所以 $\operatorname{rank} A_k = 1$. 令 $S = \sum_{k=1}^{m} A_k$. 因为 K_n 的每条边 ij 出现在一个 $E(B_k)$ 中, 满足或者 $i \in X_k$ 且 $j \in Y_k$, 或者 $j \in X_k$ 且 $i \in Y_k$, 所以对 $i \neq j$, $2m$ 个数 $(A_k)_{ij}$ 和 $(A_k)_{ji}$, $1 \leqslant k \leqslant m$ 中恰有一个数等于 1(其他为 0). 从而

$$S + S^t = J - I,$$

其中如往常一样, J 是 $n \times n$ 的全 1 矩阵, I 是 $n \times n$ 单位矩阵.

断言　如果 T 是任意满足 $T + T^t = J - I$ 的实矩阵, 那么 $\operatorname{rank} T \geqslant n-1$.

反设 $\operatorname{rank} T \leqslant n-2$. 那么 T (至少) 有两个线性无关的特征向量 x, y 使得 $Tx = Ty = 0$ [为什么]. 因为 J 的秩是 1, 由 x 和 y 生成的空间 $\langle x, y \rangle$ 包含一个非零向量 z 满足 $Jz = 0$ [为什么]. 于是由 $T + T^t = J - I$ 和 $Tz = 0$ 可得 $-z = T^t z$. 从左边与 z^t 做点积可得

$$\begin{aligned} -|z|^2 &= z^t T^t z \\ &= (z^t T^t z)^t \ \ (\text{由 } 1 \times 1 \text{ 矩阵的对称性}) \\ &= z^t T z \ \ (\text{因为一般有 } (AB)^t = B^t A^t) \\ &= 0 \ \ (\text{因为 } Tz = 0), \end{aligned}$$

与 $z \neq 0$ 矛盾. 从而断言得证, 特别地, $\operatorname{rank} S \geqslant n-1$. 但一般总有 $\operatorname{rank}(A+B) \leqslant \operatorname{rank} A + \operatorname{rank} B$ [为什么]. 于是由 $S = \sum_{k=1}^{m} A_k$ 和 $\operatorname{rank} A_k = 1$ 可得 $\operatorname{rank} S \leqslant m$. 故 $m \geqslant n-1$, 得证. □

12.4 不均匀的 Fisher 不等式

一个参数为 (v, k, λ, r, b) 的平衡不完全区组设计 (balanced incomplete block design) (BIBD) 是一个 v 元集 X 和一个 k 元子集 (区组) 族 $\mathcal{A}$, 其中 $\#\mathcal{A} = b$, 满足如下条件: 任意两个点 $x, y \in X$ 都恰好包含在 λ 个区组中, 而且每个点都恰好属于 r 个区组. 我们还假设 $k < v$, 这是名词 "不完全" 的由来. 我们可以把 BIBD 画成一个顶点二分为 $(X, \mathcal{A})$ 的二部图. 如果 $x \in A$ 就从 $x \in X$ 往 $A \in \mathcal{A}$ 连一条边. 因此每个顶点 $x \in X$ 的度是 r, 且每个顶点 $A \in \mathcal{A}$ 的度是 k. 于是有 $vr = kb$ (图中的总边数). 我们也可以计数与 $\mathcal{A}$ 中同一个顶点相关联的二边集的个数. 一方面, 因为 $\mathcal{A}$ 中每个顶点的度为 k, 所以此数就是 $b\binom{k}{2}$. 另一方面, X 中的每一对顶点都双双地与 $\mathcal{A}$ 中的 λ 个顶点相连, 故有 $\lambda\binom{v}{2} = b\binom{k}{2}$. 稍稍运算就可以证明两个等式 $vr = kb$ 和 $\lambda\binom{v}{2} = b\binom{k}{2}$ 等价于通常所写的形式

$$vr = kb, \quad \lambda(v-1) = r(k-1).$$

R. A. Fisher 在 1940 年证明了 $b \geqslant v$. 1949 年 R. C. Bose 推广了该不等式. Bose 不等式 (也称为不均匀的 Fisher 不等式 (nonuniform Fisher inequality)) 的最简便描述就是对调点和区组所扮演的这两个角色. 就是将 X 中的元素 x 看做是以包含它的区组 $A \in \mathcal{A}$ 为元素所构成的集合. 换言之, 有 r 元集族 $C_1, \ldots, C_v$, 其并集包含 b 个点 $x_1, \ldots, x_b$. 每个点恰好属于 k 个集合. 最后还要求 $\#(C_i \cap C_j) = \lambda$ 对所有 $i \neq j$ 成立.

12.4 定理 设 $C_1, \ldots, C_v$ 是 b 元集合 X 的不同子集. 如果存在 (不依赖 i 和 j 的) $1 \leqslant \lambda < b$ 使得对所有 $i \neq j$ 都有 $\#(C_i \cap C_j) = \lambda$, 那么 $v \leqslant b$.

证明 情况 1: 对某个 i 有 $\#C_i = \lambda$. 那么所有 C_j 都包含 C_i 并且此外互不相交, 故

$$v \leqslant \underbrace{1}_{\text{来自 } C_i} + \underbrace{b-\lambda}_{\text{来自所有 } C_j \neq C_i} \leqslant b.$$

情形 2: 对所有 i 都有 $\#C_i > \lambda$. 记 $\gamma_i = \#C_i - \lambda > 0$. 令 $\boldsymbol{M}$ 为集合系统 $C_1, \ldots, C_v$ 的关联矩阵, 即 $\boldsymbol{M}$ 的行对应 C_i, 列对应 X 的元素 $x_1, \ldots, x_b$, 其中

$$\boldsymbol{M}_{ij} = \begin{cases} 1, & x_j \in C_i, \\ 0, & x_j \notin C_i. \end{cases}$$

设 $\boldsymbol{A}=\boldsymbol{M}\boldsymbol{M}^t$. 前提假设意味着 $\boldsymbol{A}=\lambda J+G$, 其中 J 如往常一样是 (v 阶) 全 1 矩阵, G 是对角阵 $\mathrm{diag}(\gamma_1,\ldots,\gamma_v)$.

断言　$\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})=v$ (即 $\boldsymbol{A}$ 是可逆矩阵). 那么有

$$v=\mathrm{rank}(\boldsymbol{A})\leqslant\mathrm{rank}(\boldsymbol{M})\leqslant b,$$

最后一个等式是因为 $\boldsymbol{M}$ 有 b 列.

如定理 4.7的证明, 一个实对称矩阵 $\boldsymbol{B}$ 是半正定的, 如果它只有非负特征根. 等价地, 由基本线性代数知, 对所有长度为 v 的行向量 u 都有 $u\boldsymbol{B}u^t\geqslant 0$. 进一步地, $\boldsymbol{B}$ 是正定的 (故只有正特征根), 如果对所有 $u\neq 0$ 都有 $u\boldsymbol{B}u^t>0$.

现在容易算出对所有 $u\neq 0$,

$$u(\lambda J+G)u^t=\lambda(u_1+\cdots+u_v)^2+\gamma_1u_1^2+\cdots+\gamma_vu_v^2>0.$$

于是 $\boldsymbol{A}=\lambda J+G$ 是正定的, 故有满秩 v. □

12.5　奇邻域覆盖

考察一个 $m\times n$ 的格子图. 图 12.2是 $m=3$, $n=4$ 的情形. 在每个顶点有一盏点亮的灯和一个改变其自身和邻域 (邻接顶点) 灯状态的开关. 是否可以将所有灯都熄灭?

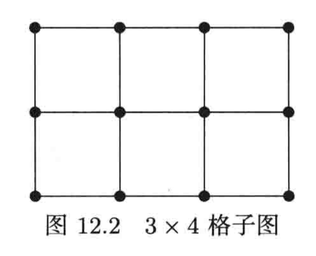


图 12.2　3×4 格子图

这个问题一直没有解决, 直到 1989 年 Sutner (当时是研究生) 用自动机理论证明了对任意 (any)(有限) 图答案都是肯定的! 更确切地, 设 G 是一个有限图, 在每个顶点有一盏点亮的灯和一个改变其自身和邻域 (邻接顶点) 灯状态的开关. 那么可以将所有灯熄灭. 我们将改良归于 Y. Caro 的基于线性代数的简单证明.

不失一般性可设 G 是简单图. 如果 $v\in V(G)$, 那么 v 的邻域 (neighborhood) $N(v)$ 就是与 v 邻接的所有顶点和 v 本身构成的集合. 略加思索可知我们需要证明下面的结果.

12.5 定理　*存在子集 $S\subseteq V=V(G)$ 使得 $\#(S\cap N(v))$ 对所有 $v\in V$ 都是奇数. (从而在顶点 $v\in S$ 处开关会熄灭所有的灯.)*

证明　设 $V(G)=\{v_1,\ldots,v_p\}$. 令 $\boldsymbol{A}$ 是 G 在域 $\mathbb{F}_2$ 上的关联矩阵, $y=(1,1,\ldots,1)\in\mathbb{F}_2^p$. 记 $\mathrm{row}(\boldsymbol{B})$ 为矩阵 $\boldsymbol{B}$ 的行空间. 给定 $S\subseteq V$, 用 $\chi_S=(a_1,\ldots,a_p)\in\mathbb{F}_2^p$ 表示 S 的特征 (行) 向量, 即

$$a_i=\begin{cases}1,\ v_i\in S,\\ 0,\ v_i\notin S.\end{cases}$$

注意在 S 处开关会熄灭所有的灯当且仅当 $\chi_S(\boldsymbol{A}+I)=y$. 因此我们要证明 $y\in\mathrm{row}(\boldsymbol{A}+I)$ [为什么].

回顾线性代数中关于正交子空间的一些标准结果. 设 K 是一个域, 对 $u,v\in K^n$ 用 $u\cdot v$ 表示 u 和 v 的通常点积 (2.1), 于是 $u\cdot v\in K$. 如果 W 是 K^n 的子空间, 那么定义正交子空间 (orthogonal subspace) $W^\perp$ 为

$$W^\perp=\{u\in K^n:u\cdot v=0\ 对所有\ v\in W\}.$$

(在第11章我们讨论了 $K=\mathbb{R}$ 的情形.) 设 $d=\dim W$. 因为 $W^\perp$ 是 d 个线性无关的齐次线性方程的解集 [为什么], 所以

$$\dim W+\dim W^\perp=n. \tag{12.2}$$

注意由 $^\perp$ 的定义知 $W\subseteq(W^\perp)^\perp$. 联立等式 (12.2) 和在该等式中将 W 替换为 $W^\perp$ 所得的等式, 可得 $\dim W=\dim(W^\perp)^\perp$. 于是

$$(W^\perp)^\perp=W. \tag{12.3}$$

注　虽然与这里不相关, 但我们指出: 如果 $K\subseteq\mathbb{R}$ 那么有 $W\cap W^\perp=\{0\}$, 而这个事实对特征 $p\neq 0$ 的情形不成立. 要在复数域 $\mathbb{C}$ 上得到有意义的理论, 我们应该定义 $u\cdot v=u_1\bar{v}_1+\cdots+u_n\bar{v}_n$, 其中 $^-$ 表示复共轭.

现在由等式 (12.3), 向量 $y=(1,1,\ldots,1)$ (或 $\mathbb{F}_2^n$ 中任意向量) 属于 $\boldsymbol{A}+I$ 的行空间当且仅当它与 $\mathrm{row}(\boldsymbol{A}+I)^\perp=\ker(\boldsymbol{A}+I)$ 中的每个向量都正交. 因此我们需要证明如果 $(\boldsymbol{A}+I)v^t=0$, 那么 $v\cdot y=0$. 等价地, 如果 $yv^t\neq 0$ 那么 $(\boldsymbol{A}+I)v^t\neq 0$. 注意: (a) $yv^t\neq 0$ 意味着 v 有奇数个 1; (b) $(\boldsymbol{A}+I)v^t$ 是 $\boldsymbol{A}+I$ 中被 v 中 1 的位置所标记的那些行的和. 从而我们需要证明 $\boldsymbol{A}+I$ 中行和为 0 的行数不是奇数.

假设顶点 $v_1,\ldots,v_k$ 标记了 $\boldsymbol{A}+I$ 中行和为 0 的行. 令 H 是由 $v_1,\ldots,v_k$ 导出 (induced) 的子图, 即 H 的顶点是 $v_1,\ldots,v_k$, 边是所有 G 中连接这些顶点的边. 令 b_{ij} 为 $\boldsymbol{A}+I$ 的 (i,j)-元. 因为对 $1\leqslant j\leqslant n$ 有 $\sum_{i=1}^k b_{ij}=0$, 且每个 $b_{ii}=1$, 所以 H 中每个顶点的度数都是奇数. 由于 [为什么]

$$\sum_{v\in V(H)}\deg v=2\cdot\#E(H),$$

故有 $k = \#V(H)$ 是偶数, 得证. □

12.6 循环 Hadamard 矩阵

对于下一个 “代数组合学的珍宝”, 我们将脱离线性代数的领域, 通过应用一些简单的代数数论知识来寻求一些变化.

若一个 $n \times n$ 矩阵 H 的元都是 ± 1, 且它的行两两正交, 则称为 Hadamard 矩阵. 等价地, 它的元都是 ± 1 且 $HH^t = nI$. 特别地 [为什么],

$$\det H = \pm n^{n/2}. \tag{12.4}$$

易知如果 H 是 $n \times n$ 的 Hadamard 矩阵, 那么 $n = 1$, $n = 2$, 或者对某个整数 $m \geqslant 1$ 有 $n = 4m$. (见练习 12.18.) 有猜想说反命题也成立, 即对每个这样的 n 都存在 $n \times n$ 的 Hadamard 矩阵.

一个 $n \times n$ 矩阵 $A = (b_{ij})$ 称为循环的 (circulant) 或循环矩阵 (circulant matrix), 如果它对某些数 $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ 满足 $b_{ij} = a_{i-j}$, 其中下标 $i - j$ 模 n 取值. 例如,

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ d & a & b & c \\ c & d & a & b \\ b & c & d & a \end{bmatrix}$$

是循环的. 设 $A = (a_{i-j})$ 是 $n \times n$ 循环矩阵, 记 $\zeta = \mathrm{e}^{2\pi i/n}$ 是 n 次本原单位根. 直接计算可知对 $0 \leqslant j < n$ 列向量 $[1, \zeta^j, \zeta^{2j}, \ldots, \zeta^{(n-1)j}]^t$ 是 A 的对应特征值 $a_0 + \zeta^j a_1 + \zeta^{2j} a_2 + \cdots + \zeta^{(n-1)j} a_{n-1}$ 的特征向量. 故

$$\det A = \prod_{j=0}^{n-1} (a_0 + \zeta^j a_1 + \zeta^{2j} a_2 + \cdots + \zeta^{(n-1)j} a_{n-1}). \tag{12.5}$$

注意矩阵

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

既是 Hadamard 矩阵也是循环矩阵.

猜想 设 H 是 $n\times n$ 循环 Hadamard 矩阵. 那么 $n=1$ 或 $n=4$.

对此猜想第一个重要的工作归于 R. J. Turyn. 他证明了不存在 $8m$ 阶的循环 Hadamard 矩阵, 他还排除了某些形如 $4(2m+1)$ 的阶的情形. Turyn 的证明应用了代数数论的系统工具. 此处我们仅证明特殊的情形 $n=2^k$, $k\geqslant 3$, 其中代数数论可以被“降格”到初等的交换代数和域理论. (我们仅在定理 12.14中用到了一点 Galois 理论, 也可以用更多一点的工作避免.) 用类似的方法对其他的 n 值给出证明应该是有趣的工作.

12.6 定理 对 $k\geqslant 3$, 不存在 2^k 阶的循环 Hadamard 矩阵 H.

注 令人好奇的是数 2^k $(k\geqslant 2)$ 是 4 的倍数中最容易证明不存在这样阶数的循环 Hadamard 矩阵, 而另一方面数 2^k $(k\geqslant 1)$ 又是最容易证明存在这样阶数的 Hadamard 矩阵. 要证 2^k 是一个 Hadamard 矩阵 H 的阶数, 首先注意 $k=1$ 的情形是平凡的. 如果 H_1 是一个阶为 a 的 Hadamard 矩阵, H_2 是一个阶为 b 的 Hadamard 矩阵, 那么循常规可证张量 (或 Kronecker) 积 $A\otimes B$ 是一个阶为 ab 的 Hadamard 矩阵. 于是对 $k\geqslant 1$ 存在阶为 2^k 的 Hadamard 矩阵.

从现在开始我们假定 $n=2^k$ 和 $\zeta=\mathrm{e}^{2\pi i/2^k}$. 显然 ζ 是多项式 $p_k(x)=x^{2^{k-1}}+1$ 的根. 我们将在环 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中工作, 就是 $\mathbb{C}$ 中包含 $\mathbb{Z}$ 和 ζ 的最小子环. 记 $\mathbb{Q}(\zeta)$ 为 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 的商域, 即在 $\mathbb{Q}$ 中添加 ζ 所得的域.

12.7 引理 多项式 $p_k(x)$ 在 $\mathbb{Q}$ 上不可约.

证明 如果 $p_k(x)$ 是可约的, 那么 $p_k(x+1)$ 也可约. 多项式分解的一个标准结果是 Gauss 引理, 说的是一个整系数多项式如果在 $\mathbb{Q}$ 上可分解因式, 那么就在 $\mathbb{Z}$ 上可分解因式. 如果 $p(x),q(x)\in\mathbb{Z}[x]$, 用 $p(x)\equiv q(x)\,(\mathrm{mod}\,2)$ 来表示 $p(x)-q(x)$ 的系数都是偶数. 现在 [为什么]

$$p_k(x+1)\equiv(x+1)^{2^{k-1}}+1\equiv x^{2^{k-1}}\,(\mathrm{mod}\,2).$$

因此将 $p_k(x+1)$ 在 $\mathbb{Z}$ 上任意分解为两个至少一次的因式的积时, 必有 $p_k(x+1)=(x^r+2a)(x^s+2b)$, 其中 $r+s=2^{k-1}$ 且 a,b 分别是次数小于 r 和 s 的多项式. 于是 $p_k(x+1)$ 的常数项被 4 整除, 矛盾. □

由基础域理论可知每个元素 $u\in\mathbb{Z}[\zeta]$ 可以唯一写为

$$u=b_0+b_1\zeta+b_2\zeta^2+\cdots+b_{n/2-1}\zeta^{n/2-1},\quad b_i\in\mathbb{Z}.$$

我们证明定理 12.6 的基础是分别用等式 (12.4) 和 (12.5) 计算 $\det H$ 所得到的公式

$$\prod_{j=0}^{n-1}(a_0+\zeta^j a_1+\zeta^{2j}a_2+\cdots+\zeta^{(n-1)j}a_{n-1})=\pm n^{n/2}=\pm 2^{k2^{k-1}}.\tag{12.6}$$

从而就得到了 $2^{k2^{k-1}}$ 在 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中的一个分解因式. 代数数论就是研究在代数数域中代数整数(和理想) 的因式分解, 因此我们有大量的系统工具可以用来证明 (在假设每个 $a_j = \pm 1$ 的情况下) 因式分解 (12.6) 的不存在性. 对比 Kummer 研究 Fermat 大定理的著名方法 (这导致了他创建代数数论), 其中他将方程 $x^n + y^n = z^n$ 看做是 $\prod_{\tau^n=1}(x+\tau y) = z^n$.

我们继续假设 $H = (a_{j-i})$ 是一个 $n \times n$ 循环 Hadamard 矩阵, 并记 H 的特征值为

$$\gamma_j = a_0 + a_1\zeta^j + a_2\zeta^{2j} + \cdots + a_{n-1}\zeta^{(n-1)j}.$$

12.8 引理 对 $0 \leqslant j \leqslant n-1$ 我们有

$$|\gamma_j| = \sqrt{n}.$$

故在 (12.6) 左边出现的所有因子都有绝对值 $\sqrt{n}$.

第一个证明 (幼稚的) 用 H_i 表示 H 的第 i 行, $\cdot$ 表示通常的点积, 且 $^-$ 表示复共轭. 那么

$$\begin{aligned}\gamma_j\bar{\gamma}_j &= (a_0 + a_1\zeta^j + \cdots + a_{n-1}\zeta^{(n-1)j})(a_0 + a_1\zeta^{-j} + \cdots + a_{n-1}\zeta^{-(n-1)j}) \\ &= H_1 \cdot H_1 + (H_1 \cdot H_2)\zeta^j + (H_1 \cdot H_3)\zeta^{2j} + \cdots + (H_1 \cdot H_n)\zeta^{(n-1)j}.\end{aligned}$$

由 Hadamard 性质可得 $H_1 \cdot H_1 = n$, 而对 $2 \leqslant k \leqslant n$ 都有 $H_1 \cdot H_k = 0$, 得证. □

第二个证明 (代数的) 矩阵 $\frac{1}{\sqrt{n}}H$ 是实正交矩阵. 由线性代数, 它的所有特征值都有绝对值 1. 故 H 的所有特征值 γ_j 都有绝对值 $\sqrt{n}$. □

12.9 引理 我们有

$$2 = (1-\zeta)^{n/2}u, \tag{12.7}$$

其中 u 是 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中的单位元.

证明 在下式中令 $x = 1$

$$x^{n/2} + 1 = \prod_{\substack{j=0 \\ j \text{ 是奇数}}}^{n-1}(x - \zeta^j)$$

可得 $2 = \prod_j(1-\zeta^j)$. 因为

$$1 - \zeta^j = (1-\zeta)(1 + \zeta + \cdots + \zeta^{j-1}),$$

只需证明 $1 + \zeta + \cdots + \zeta^{j-1}$ 在 j 为奇数时是单位元. 设 $j\bar{j} \equiv 1 \pmod{n}$. 则

$$(1 + \zeta + \cdots + \zeta^{j-1})^{-1} = \frac{1-\zeta}{1-\zeta^j}$$

$$= \frac{1-(\zeta^j)^{\bar{j}}}{1-\zeta^j} \in \mathbb{Z}[\zeta],$$

正如所证. □

12.10 引理　我们有 $\mathbb{Z}[\zeta]/(1-\zeta) \cong \mathbb{F}_2$.

证明　设 $R = \mathbb{Z}[\zeta]/(1-\zeta)$. 整数 2 在 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中不是单位元, 例如, 因为 $1/2$ 不是一个代数整数 (首一 (monic) 多项式 $f(x) \in \mathbb{Z}[x]$ 的根). 故由引理 12.9, $1-\zeta$ 也不是单位元. 从而 $R \neq \{0\}$.

因为在 R 中 $\zeta = 1$, 所以对所有 j 在 R 中都有 $\zeta^j = 1$. 从而 R 中所有元素可以写为通常的整数 m. 但由引理 12.9知在 R 中 $0 = 2$, 故 R 中仅有元素 0 和 1. □

12.11 引理　对所有 $0 \leqslant j \leqslant n-1$ 存在整数 $h_j \geqslant 0$ 使得

$$a_0 + a_1\zeta^j + a_2\zeta^{2j} + \cdots + a_{n-1}\zeta^{(n-1)j} = v_j(1-\zeta)^{h_j},$$

其中 v_j 是 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中的单位元.

证明　由引理 12.9知 2 是 $1-\zeta$ 的倍数, 故由 (12.6) 知在 $\mathbb{Z}[\zeta]/(1-\zeta)$ 中有

$$\prod_{j=0}^{n-1}\left(a_0 + a_1\zeta^j + a_2\zeta^{2j} + \cdots + a_{n-1}\zeta^{(n-1)j}\right) = 0.$$

因为由引理 12.10知 $\mathbb{Z}[\zeta]/(1-\zeta)$ 是一个整环, 所以 $a_0 + a_1\zeta^j + \cdots + a_{n-1}\zeta^{(n-1)j}$ 的某个因子被 $1-\zeta$ 整除. 将该因子与 (12.6) 的右边同除以 $1-\zeta$, 并重复这个过程. 我们持续对左边的某个因子和右边除以 $1-\zeta$ 直到右边变成单位元 u. 于是知初始乘积的每个因子都形如 $v(1-\zeta)^h$, 其中 v 是一个单位元. □

12.12 推论　或者 $\gamma_0/\gamma_1 \in \mathbb{Z}[\zeta]$ 成立, 或者 $\gamma_1/\gamma_0 \in \mathbb{Z}[\zeta]$ 成立. (事实上, 我们即将发现 $\gamma_0/\gamma_1 \in \mathbb{Z}[\zeta]$ 和 $\gamma_1/\gamma_0 \in \mathbb{Z}[\zeta]$ 显然同时成立, 但此处用不到这个事实.)

证明　由上个引理, 每个 γ_j 可以写为 $v_j(1-\zeta)^{h_j}$. 如果 $h_0 \geqslant h_1$ 那么 $\gamma_0/\gamma_1 \in \mathbb{Z}[\zeta]$; 否则 $\gamma_1/\gamma_0 \in \mathbb{Z}[\zeta]$. □

现在我们需要引入 Kronecker 关于绝对值为 1 的 $\mathbb{Z}[\zeta]$ 中元素的结果. 为完整起见, 我们提供该结果的证明. 先给一个引理. 回顾若 θ 是一个代数数 (不可约多项式 $f(x) \in \mathbb{Q}[x]$ 的根), 那么 θ 的共轭元 (conjugate) 也是 $f(x)$ 的根.

12.13 引理　设 θ 是一个代数整数, 满足 θ 和其所有共轭元都有绝对值 1. 那么 θ 是单位根.

证明 假设引理不成立. 令 $\deg\theta = d$, 即 $[\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}] := \dim_{\mathbb{Q}}\mathbb{Q}(\theta) = d$. 现在 $\theta, \theta^2, \theta^3, \ldots$ 两两不等, 故其中可取无限个数, 使两两不共轭. 因为代数整数集构成一个环, 每个 $\theta^j \in \mathbb{Z}[\theta]$ 都是某个最多 d 次[1]的首一整系数多项式的根. 如果 $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_d$ 是 θ 的共轭元, 那么 θ^j 的共轭元必得自 $\theta_1^j, \theta_2^j, \ldots, \theta_d^j$. 于是每个 θ^j 都满足其所有共轭元都有绝对值 1(和 θ^j 是代数整数) 的假设. 从而关于 θ^j 及其共轭元的第 r 个初等对称函数 e_r 至多有 $\binom{d}{r}$ 项, 每项的绝对值为 1, 所以 $|e_r| \leqslant \binom{d}{r}$. 进一步地, 因为 θ^j 是代数整数所以 $e_r \in \mathbb{Z}$. 这说明以 θ^j 为根的不可约首一多项式仅有有限种可能, 与存在无限多个两两不共轭[2]的 θ^j 这一事实矛盾. □

12.14 定理 (Kronecker) *设 τ 是单位根且 $\alpha \in \mathbb{Z}[\tau]$ 满足 $|\alpha| = 1$. 那么 α 是单位根.*

证明 因为 $\alpha \in \mathbb{Z}[\tau]$, 所以 α 是代数整数. 我们应用 Galois 理论的基本事实: 域扩张 $\mathbb{Q}(\tau)/\mathbb{Q}$ 的 Galois 群是阿贝尔的. 设 β 是 α 的一个共轭元, 于是有 $\mathbb{Q}(\tau)$ 的自同构 w 使得 $\beta = w(\alpha)$. 对等式 $\alpha\bar{\alpha} = 1$ 应用 w. 因为复共轭是 $\mathbb{Q}(\tau)$ 的自同构并与 w 交换, 所以得 $\beta\bar{\beta} = 1$. 于是 α 的所有共轭元都有绝对值 1, 从而由上个引理知 α 是单位根. □

为给出下一个结果, 我们需要如下标准代数事实: 如果 $\tau = \mathrm{e}^{2\pi i/m}$, 那么 $[\mathbb{Q}(\tau):\mathbb{Q}] = \varphi(m)$ (Euler φ-函数). 等价地, 以是 m 次本原单位根为零点的唯一首一多项式 $\Phi_m(x)$ 是不可约的. 由定义知, 这个多项式为

$$\Phi_m(x) = \prod_{\substack{1\leqslant j\leqslant m \\ \gcd(j,m)=1}} (x - \tau^j),$$

称为分圆多项式 (cyclotomic polynomial). 引理 12.7 是 $m = n\ (= 2^k)$ 的情形.

12.15 引理 *如果 $\tau \in \mathbb{Z}[\zeta]$ 是单位根, 那么有 $r \in \mathbb{Z}$ 使得 $\tau = \zeta^r$.*

证明 如果引理不成立. 易知或者对某个 $m > k$, τ 是 2^m 次本原单位根, 或者对某个奇素数 p 及 $s \geqslant 1$, τ^s 是 p 次本原单位根. 在前一种情况

$$[\mathbb{Q}(\tau):\mathbb{Q}] = \varphi(2^m) = 2^{m-1} > 2^{k-1} = \varphi(2^k) = [\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}],$$

矛盾. 在后一种情况, $\tau^s\zeta$ 是 pn 次本原单位根, 所以

$$[\mathbb{Q}(\tau^s\zeta):\mathbb{Q}] = \varphi(pn) = (p-1)\varphi(n) > \varphi(n) = [\mathbb{Q}(\zeta):\mathbb{Q}],$$

仍然矛盾. □

现在我们为完成定理 12.6的证明做好了充分的准备. 注意我们还没有用到假设 $a_i = \pm 1$. 由引理 12.8 可得

$$|\gamma_1/\gamma_0| = |\gamma_0/\gamma_1| = 1.$$

---

[1] 利用 $[\mathbb{Q}(\theta^j):\mathbb{Q}] \leqslant [\mathbb{Q}(\theta):\mathbb{Q}] = d$. ——译者注

[2] 无需两两不共轭的限制条件, 此处实际上建立了无限多个 θ^j 是有限多个不超过 d 次的多项式的根这一矛盾. ——译者注

于是由推论 12.12、定理 12.14 和引理 12.15 可知 $\gamma_0 = \zeta^{-r}\gamma_1$ 对某个 r 成立. 唯一展开 γ_0 和 $\zeta^{-r}\gamma_1$ 为 $1, \zeta, \zeta^2, \ldots, \zeta^{\frac{n}{2}-1}$ 的整系数线性组合:

$$\begin{aligned}\gamma_0 &= a_0 + a_1 + \cdots + a_{n-1} = \pm\sqrt{n},\\ \zeta^{-r}\gamma_1 &= \zeta^{-r}((a_0 - a_{n/2}) + (a_1 - a_{n/2+1})\zeta + \cdots)\\ &= (a_r - a_{n/2+r}) + (a_{r+1} - a_{n/2+r+1})\zeta + \cdots.\end{aligned}$$

对等 ζ^0 的系数即得 $\pm\sqrt{n} = a_r - a_{n/2+r}$. 因为每个 $a_i = \pm 1$, 所以必然有 $n \leqslant 4$, 证毕. □

12.7 P-递归函数

函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 称为*多项式递归的* (polynomially recursive), 或简称为*P-递归的* (P-recursive), 如果存在多项式 $P_0(n), \ldots, P_d(n) \in \mathbb{C}[n]$, 其中 $P_d(n) \neq 0$, 使得

$$P_d(n)f(n+d) + P_{d-1}(n)f(n+d-1) + \cdots + P_0(n)f(n) = 0 \tag{12.8}$$

对所有 $n \geqslant 0$ 成立.

例如 Fibonacci 序列 F_n 是 P-递归的, 因为 $F_{n+2} - F_{n+1} - F_n = 0$ 对所有 $n \geqslant 0$ 成立. 此处 $d = 2$, $P_2(n) = 1$, $P_1(n) = P_0(n) = -1$. 这个情况很特别因为多项式 $P_i(n)$ 是常数 (constants). 另一个 P- 递归函数是 $f(n) = n!$, 因为 $f(n+1) - (n+1)f(n) = 0$ 对所有 $n \geqslant 0$ 成立.

用 $\mathcal{P}$ 表示所有 P-递归函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 所构成的集合. 本节的目的是证明 $\mathcal{P}$ 是一个$\mathbb{C}$-代数 (algebra), 也就是说, 对任意 $f, g \in \mathcal{P}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$, 都有

$$\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}, \qquad fg \in \mathcal{P},$$

其中默认例如 $(\alpha f)g = f(\alpha g) = \alpha(fg)$ 的显然的相容性质. 在展开证明之前需要处理一个技术性问题: 我们希望从等式 (12.8)推断

$$f(n+d) = -\frac{1}{P_d(n)}\big(P_{d-1}(n)f(n+d-1) + \cdots + P_0(n)f(n)\big). \tag{12.9}$$

但这个公式在 $P_d(n) = 0$ 时有问题. 该问题仅对有限个 n 发生, 所以等式 (12.9)在 n 充分大时有效. 故我们希望仅对充分大的 n 处理函数 $f(n)$. 为此, 如果对除有限个外的所有 n 都有 $f(n) = g(n)$, 那么就定义 $f \sim g$. 显然 $\sim$ 是一个等价关系; 等价类称为函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 在 ∞ 处的*芽* (germ). 包含 f 的芽记为 $[f]$. 记 $\mathcal{G}$ 为所有芽构成的集合.

12.16 引理 (a) 如果 f 是 P-递归的且 $f \sim g$, 那么 g 是 P-递归. 换言之, P-递归的性质与等价关系 $\sim$ 相容.

(b) 记 $\mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 为所有函数 $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ 构成的复向量空间. 设 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$ 和 $f_1, f_2, g_1, g_2 \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. 如果有 $f_1 \sim f_2$ 和 $g_1 \sim g_2$, 那么有 $\alpha f_1 + \beta g_1 \sim \alpha f_2 + \beta g_2$ 和 $f_1 g_1 \sim f_2 g_2$. 换言之, 线性组合和乘法与等价关系 $\sim$ 相容 (compatible). 因此集合 $\mathcal{G}$ 具有一个 $\mathbb{C}$-代数的结构, 即, 既是复向量空间也是环 (默认例如 $(\alpha f)g = f(\alpha g) = \alpha(fg)$ 的显然的相容性质).

证明 (a) 假设对所有 $n > n_0$ 有 $f(n) = g(n)$. 设 f 满足 (12.8) 中的递推关系. 两边同时乘以 $\prod_{j=0}^{n_0}(n-j)$ 即得一个 g 满足的递推关系. 故 g 是 P-递归的.

(b) 显然. □

用 $\mathbb{C}[n]$ 表示关于 n 的复系数多项式构成的环, $\mathbb{C}(n)$ 表示 $\mathbb{C}[n]$ 的商域, 即所有有理函数 $P(n)/Q(n)$ 构成的域, 其中 $P, Q \in \mathbb{C}[n]$. 假设 $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 和 $R \in \mathbb{C}(n)$. 那么 $f(n)R(n)$ 对充分大的 n 有定义 (即当 $R(n)$ 的分母非零时). 因此可定义芽 $[f(n)R(n)] \in \mathcal{G}$ 为在 n 充分大时与 $f(n)R(n)$ 相等的任意函数的芽. 易知这个标量积的定义使 $\mathcal{G}$ 成为域 $\mathbb{C}(n)$ 上的向量空间. 下面我们陈述关于 P-递归函数 (或它们的芽) 的关键刻画.

12.17 引理 一个函数 $f \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ 是 P-递归的当且仅当在 $\mathbb{C}(n)$ 上由芽 $[f(n)]$, $[f(n+1)]$, $[f(n+2)], \ldots$ 生成的向量空间 $\mathcal{V}_f$ 是有限维的.

证明 假设 $f(n)$ 满足等式 (12.8). 记 $\mathcal{V}'_f$ 为 $\mathbb{C}(n)$ 上由 $[f(n)], [f(n+1)], [f(n+2)], \ldots, [f(n+d-1)]$ 生成的向量空间, 则 $\dim_{\mathbb{C}(n)} \mathcal{V}'_f \leqslant d$. 等式 (12.9) 表明 $[f(n+d)] \in \mathcal{V}'_f$. 在等式 (12.9)中将 n 替换为 $n+1$, 就看出 $[f(n+d+1)]$ 属于 (在 $\mathbb{C}(n)$ 上) 由 $[f(n+1)]$, $[f(n+2)], \ldots, [f(n+d)]$ 生成的线性空间. 因为这 d 个芽都属于 $\mathcal{V}'_f$, 所以 $[f(n+d+1)] \in \mathcal{V}'_f$. 继续这个讨论, 通过对 k 归纳就知道 $f(n+d+k) \in \mathcal{V}'_f$ 对所有 $k \geqslant 0$ 成立, 从而 $\mathcal{V}'_f = \mathcal{V}_f$. 故 $\mathcal{V}_f$ 是有限维的.

反之, 假设 $\dim_{\mathbb{C}(n)} \mathcal{V}_f < \infty$. 那么对某个 d, 芽 $[f(n)]$, $[f(n+1)], \ldots, [f(n+d)]$ 在 $\mathbb{C}(n)$ 上线性相关. 写下这个线性相关关系并通分, 就得到一个 f 满足的递推关系 (12.8). 故 f 是 P-递归的. □

现在我们为陈述本节的主要结果做好了充分的准备.

12.18 定理 设 $f, g \in \mathcal{P}$ 和 $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$. 那么:

(a) $\alpha f + \beta g \in \mathcal{P}$,

(b) $fg \in \mathcal{P}$.

证明 (a) 由引理 12.17 只需证 $\dim \mathcal{V}_{\alpha f + \beta g} < \infty$. 由定义, 和 (sum) $\mathcal{V}_f + \mathcal{V}_g$ 是由所有线性组合 $\gamma[u] + \delta[v]$ 构成的向量空间, 其中 $[u] \in \mathcal{V}_f$, $[v] \in \mathcal{V}_g$, $\gamma, \delta \in \mathbb{C}(n)$. 特别地,

$\mathcal{V}_f+\mathcal{V}_g$ 包含所有芽 $\alpha[f(n+k)]+\beta[g(n+k)]=[\alpha f(n+k)+\beta g(n+k)]$, $k\geqslant 0$. 故

$$\mathcal{V}_{\alpha f+\beta g}\subseteq \mathcal{V}_f+\mathcal{V}_g.$$

现在如果 V 和 W 是某个向量空间的子空间, 那么 $V+W$ 就由 V 的基和 W 的基的并生成. 特别地, 如果 V 和 W 是有限维的, 那么 $\dim(V+W)\leqslant \dim V+\dim W$. 于是

$$\dim \mathcal{V}_{\alpha f+\beta g}\leqslant \dim(\mathcal{V}_f+\mathcal{V}_g)\leqslant \dim\mathcal{V}_f+\dim\mathcal{V}_g<\infty,$$

正如所证.

(b) 证明与 (a) 类似, 只是我们要用在域 K 上的张量积 (tensor product) $V\otimes_K W$ 来替换和 $V+W$. 回顾线性代数知识: $V\otimes_K W$ (有些幼稚地) 可以看做是由符号 $v\otimes w$ 生成的向量空间, 其中 $v\in V$, $w\in W$, 并满足条件

$$\begin{aligned}(v_1+v_2)\otimes w&=v_1\otimes w+v_2\otimes w,\\ v\otimes(w_1+w_2)&=v\otimes w_1+v\otimes w_2,\\ \alpha v\otimes w=v\otimes\alpha w&=\alpha(v\otimes w),\end{aligned}$$

其中 α 是标量. 一个标准而简单的结论是如果 V 有基 $\{v_1,\ldots,v_m\}$, W 有基 $\{w_1,\ldots,w_n\}$, 那么 $V\otimes_K W$ 有基 $v_i\otimes w_j$, 其中 $1\leqslant i\leqslant m$ 和 $1\leqslant j\leqslant n$. 特别地,

$$\dim(V\otimes_K W)=(\dim V)(\dim W).$$

回顾张量积 $V\otimes W=V\otimes_K W$ 基本的 "泛性质": 存在一个双线性映射 $\Psi\colon V\times W\to V\otimes W$ 使得对任意向量空间 Y 和双线性映射 $\Phi\colon V\times W\to Y$, 有唯一线性映射 $\varphi\colon V\otimes W\to Y$ 使得 $\Phi=\varphi\Psi$. 特别地, 有唯一线性变换 $\varphi\colon \mathcal{V}_f\otimes_{\mathbb{C}(n)}\mathcal{V}_g\to\mathcal{G}$ 满足

$$[f(n+i)]\otimes g[(n+j)]\overset{\varphi}{\mapsto}[f(n+i)g(n+j)].$$

φ 的像包含所有芽 $[f(n+i)g(n+i)]$, 所以 $\mathcal{V}_{fg}\subseteq \mathrm{image}(\varphi)$. 从而

$$\dim\mathcal{V}_{fg}\leqslant\dim(\mathcal{V}_f\otimes_{\mathbb{C}(n)}\mathcal{V}_g)=(\dim\mathcal{V}_f)(\dim\mathcal{V}_g)<\infty,$$

得证. □

第 12 章注记

百名囚犯问题最早被 P. B. Miltersen 考虑. 该问题出现在 Miltersen 与 A. Gál 合写的文章 [43]. 关于此问题历史的进一步信息, 以及证明囚犯们策略的最优性, 请参见 E. Curtin 和 M. Warshauer [21].

奇数镇定理归于 E. R. Berlekamp [7]. 关于分解 K_n 为完全二部子图的定理 12.3归于 R. L. Graham 和 H. O. Pollak [46, 47]. 关于 Fisher 对 BIBD 的不等式 $v \leqslant b$ 的原始证明以及 Bose 的 不均匀推广, 请参见 [34] 和 [11]. Sutner 对奇邻域定理 (定理 12.5) 的原始证明出现于 [110], 而 Y. Caro 的简单些的证明可以在文 [16] 中找到. 奇邻域问题又名为熄灯谜题 (Lights Out Puzzle). 要了解与 12.2~12.5 节一脉相承的许多其他线性代数的应用, 请见 L. Babai 和 P. Frankl 的未发表的手稿 [4], 以及 J. Matoušek 的书 [76].

循环 Hadamard 矩阵猜想最早在 H. J. Ryser 的文章 [95, p. 134] 中提到, 但其确切来源是不清楚的. 本书中提到的 Turyn 的工作出现于 [114, 115]. 更多的近期进展归于 K. H. Leung 和 B. Schmidt [68].

尽管 19 世纪的分析学家就知道了 P-递归函数和它在习题 12.25中的 "堂兄弟" D-有限级数, 但是对它们的系统处理直到 1980 才首次出现在 Stanley 的文章[102] 中, 文中包含了定理 12.18的陈述和证明. 进一步的论述, 参见 Stanley [108, §6.4].

第 12 章练习

1. 假设如在12.1节中我们有 $2n$ 个囚犯和同样的邪恶典狱官. 设 $0 < \alpha < 1$. 现在囚犯们打开 $2\alpha n$ 个盒子 (更确切地, 最邻近 $2\alpha n$ 的整数). 在 α 取何值时, 定理 12.1证明中用的策略在 $n \to \infty$ 的极限情况下可以达到 50% 的获胜机会?
2. 假设如在12.1节中我们有相同的 100 个囚犯和邪恶典狱官. 但是这次每个囚犯必须打开 99 个不同的盒子. 如果任何一个囚犯看到了自己的名字, 那么他们所有人都会被杀掉. 找到囚犯们的最优策略以及相应的成功概率 p. 注意 $10^{-200} \leqslant p \leqslant 10^{-2}$, 上界是因为第一个囚犯的成功率是 1/100. (不像12.1节中的情形, 一旦找到本题的最优策略, 证明其确实最优是简单的.)
3. (a) 这次邪恶典狱官在 100 个囚犯的每人头上放一个红帽子或蓝帽子. 每个囚犯可以看到所有其他人的帽子但不能看到自己的帽子. 囚犯们同时猜测自己帽子的颜色. 如果有囚犯猜错了, 那么所有囚犯都会被杀掉. 什么策略可以使他们所有人被杀的概率最小化?

   (b) 现在囚犯们如前拥有帽子, 但只有猜错的囚犯被杀. 求最大的整数 m 使得存在某个策略确保 (guarantee) 至少有 m 个囚犯存活.
4. (*) 我们可怜的 100 个囚犯在前额上有不同的实数. 他们可以看到除自己的数之外的所有数. 每人 (无关地, 无交流地) 选取一个红色或蓝色的帽子戴在头上. 典狱官将他

们按头上的数字递增排成一排. 如果有两个连续的囚犯头上的颜色相同, 那么所有人都将被杀. 求最好的成功策略.

5. (a) (*) 假设 n 个人住在反奇数镇. 每个社团有偶数个成员, 且每两个社团有奇数个公共成员. 证明至多可以组成 n 个社团.
   (b) (相当困难) 证明如果 n 是偶数, 那么至多可以组成 $n-1$ 个社团.
6. (a) 假设 n 个人住在偶数镇. 每个社团有偶数个人, 每两个社团有偶数个公共成员, 而且没有两个社团拥有完全相同的成员. 证明最大社团数为 $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$.
   (b) (相当困难) 假设已经用 (a) 中偶数镇的规则组成了低于 $2^{\lfloor n/2 \rfloor}$ 个社团. 证明在不打破规则的情况下还可以组成一个新社团.
7. (二部奇数镇 (Bipartite Oddtown)) 一个 n 个公民的小镇有 m 个红色社团 $R_1, \ldots, R_m$ 和 m 个蓝色社团 $B_1, \ldots, B_m$. 假设对每个 i 有 $\#(R_i \cap B_i)$ 是奇数, 对每对 $i \neq j$ 有 $\#(R_i \cap B_j)$ 是偶数. 证明 $m \leqslant n$.
8. 三倍镇 (Triptown) 有 n 个人和一些社团. 任意两个不同的社团有 3 的倍数个公共成员. 设 j 是满足 $\#C$ 不是 3 的倍数的社团 C 的个数. 证明 $j \leqslant n$.
9. 奇怪镇 (Strangetown) 有 n 个人和 k 个社团 $C_1, \ldots, C_k$. 每个社团有偶数个成员, 每两个社团有偶数个公共成员, 但有如下例外: 对 $1 \leqslant i \leqslant k$, 社团 C_i 和 C_{k+1-i} 有奇数个公共成员. (如果 $k = 2m+1$ 且 $i = m+1$, 那么这意味着社团 C_{m+1} 有奇数个成员.) 证明至多有 n 个社团.
10. 怪诞镇 (Weirdtown) 有 n 个人和 k 个社团 $C_1, \ldots, C_k$. 每个社团有偶数个成员, 每两个社团有偶数个公共成员, 但有如下例外: 如果 $1 \leqslant i \leqslant k-1$, 那么 C_i 和 C_{i+1} 有奇数个公共成员. 作为关于 n 的函数, k 的最大可能值是什么?
11. (a) 一个 $n \times n$ 实矩阵 A 如果满足 $A^t = -A$ 就称为斜对称的 (skew-symmetric). 设 A 是这样的矩阵且 n 是奇数. 证明 $\det A = 0$. (这是线性代数的标准结果.)
    (b) 设 G 是有奇数个顶点的简单图. 顶点 v 的空心邻域 (deleted neighborhood) $N'(v)$ 是所有与 v 邻接的顶点构成的集合. 证明存在一个顶点集的非空子集 S 使得 S 与每个空心邻域 $N'(v)$ 有偶数个公共元素.
12. (*) 设 M_n 表示所有实 $n \times n$ 矩阵构成的向量空间, 故 $\dim M_n = n^2$. 设 V 是 M_n 的子空间, 满足每个矩阵 $A \in V$ 的所有特征值都是实数. 证明 $\dim V \leqslant \binom{n+1}{2}$.
13. 设完全图 K_n 的边集 $E(K_n)$ 是完全二部图 $B_1, \ldots, B_m$ 的边集的并, 满足 K_n 的每条边被覆盖奇数次. 证明 $m \geqslant (n-1)/2$. (还不知道 m 的最小值.)
14. 顶点三部划分为 (X_1, X_2, X_3) 的完全三部图 (complete tripartite graph) 是顶点集为 X_i 的无交并的图, 且任意不在同一个集合 X_i 的两个顶点之间都有一条边. (允许 X_i 中的一个是空集, 从而例如 K_2 就是一个完全三部图.) 因此, 如果 $\#X_i = p_i$, 那么完

全三部图有 $p_1p_2+p_1p_3+p_2p_3$ 条边. 假设边集 $E(K_n)$ 划分为 m 个完全三部图的边集的无交并. m 的最小值是什么?

15. (*) 设 $A_1,\ldots,A_n$ 是 n 元集 X 的不同子集. 用线性代数证明对某个 $x\in X$, 所有集合 A_i-x ($A_i-\{x\}$ 的简写) 都互不相同. (有一个相当简单的组合证明, 但那不是所要的.) 记号的注释: 若 $x\notin A_i$ 则 $A_i-x=A_i$.
16. 证明定理 12.5中 “开关集” S 的个数形如 2^n, 其中 $n\geqslant 0$.
17. (a) 设 G 是 p 个顶点的简单图, 且它恰有 2^{p-1} 个开关集, 即在 12.5节的场景中按下它们将熄灭所有 (亮着的) 灯. 证明 G 是完全图 K_p. 给出一个基于线性代数的证明.
    (b) 描述 K_p 的 2^{p-1} 个开关集.
    (c) (更难) 同上, 但恰有 2^{p-2} 个开关集. 证明 G 是两个完全图的无交并.
18. (*) 证明一个 Hadamard 矩阵 H 的阶为 1, 2, 或 $n=4m$(对某个整数 $m\geqslant 1$).
19. 对什么样的 n, 在 n 维立方体的顶点中存在 $n+1$ 个不同顶点, 使得其中任意两点之间的距离都相等? 例如, 对 $n=2$ 显然不可能, 而对 $n=3$ 顶点可以取为 000, 110, 101, 011. 答案应该涉及 Hadamard 矩阵.
20. (a) 证明如果 H 是一个 $n\times n$ 的 Hadamard 矩阵, 且它的所有行都有相同数目的 1, 那么 n 是一个平方数.
    (b) 证明 H 的所有列也都有相同数目的 1.
21. (*) 显然 2^n 和 $n!$ 是 P-递归函数, 因此由定理 12.18知 $f(n)=2^n+n!$ 也是. 找出 $f(n)$ 满足的形如 (12.8) 的递归式.
22. (困难) 设 $f(n)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}^3$. 证明

$$(n+2)^2f(n+2)-(7n^2+21n+16)f(n+1)-8(n+1)^2f(n)=0,\quad n\geqslant 0.$$

23. (*) (困难) 设 $f(n)$ 是从 $(0,0)$ 到 (n,n) 每步为 $(1,0)$, $(0,1)$ 或 $(1,1)$ 的格路的数目. 例如, $f(1,1)=3$, 对应格路 (其中我们简写 $(1,0)$ 为 10 等.) $00\to 10\to 11$, $00\to 01\to 11$ 和 $00\to 11$. 证明

$$(n+2)f(n+2)-3(2n+3)f(n+1)+(n+1)f(n)=0,\quad n\geqslant 0.$$

24. (a) 设 $\alpha_1,\ldots,\alpha_k$ 是不同的非零复数, 且 $Q_1(n),\ldots,Q_k(n)$ 是不同的非零复多项式. 定义

$$f(n)=Q_1(n)\alpha_1^n+Q_2(n)\alpha_2^n+\cdots+Q_k(n)\alpha_k^n,\quad n\geqslant 0.$$

    证明 $f(n)$ 是 P-递归的.
    (b) (困难) 证明 $f(n)$ 满足的形如(12.8)的递归式中最低阶数 d 等于 k.

25. (a) 设 $\mathbb{C}[[x]]$ 表示 $\mathbb{C}$ 上幂级数 $\sum_{n\geqslant 0} a_n x^n$ 构成的环. 易见 $\mathbb{C}[[x]]$ 是一个整环.Laurent 级数 (Laurent series) 是形如 $\sum_{n\in\mathbb{Z}} b_n x^n$ 的级数, 即任何整指数都是允许的. 证明 $\mathbb{C}[[x]]$ 的商环, 记为 $\mathbb{C}((x))$, 由所有形如 $\sum_{n\geqslant n_0} b_n x^n$ 的 Laurent 级数构成, 其中 $n_0\in\mathbb{Z}$ 是某个固定的整数, 即所有只有有限个负幂次项的 Laurent 级数. 等价地, $\mathbb{C}((x))$ 是从环 $\mathbb{C}[[x]]$ 中添加单个元素 x 的逆所得的环 (事实上是域). 证明 $\mathbb{C}((x))$ 包含由所有有理函数 $P(x)/Q(x)$(其中 $P,Q\in\mathbb{C}[x]$) 构成的有理函数域 $\mathbb{C}(x)$, 具体解释为存在 $F(x)\in\mathbb{C}((x))$ 满足 $Q(x)F(x)=P(x)$.

(b) Laurent 级数 $y\in\mathbb{C}((x))$ 称为 *D-有限的* (*D*-finite) (*微分有限* (differentiably finite) 的简写) 如果存在不全为 0 的多项式 $p_0(x),\ldots,p_d(x)$ 使得

$$\begin{aligned}&p_d(x)y^{(d)}+\cdots+p_1(x)y'+p_0(x)y\\=&0,\end{aligned}$$

其中 $y^{(d)}$ 表示 y 对 x 的 d 次导数. 证明幂级数 $\sum_{n\geqslant 0} f(n)x^n$ 是 D-有限的当且仅当 $f(n)$ 是 P-递归的.

(c) 证明 $y\in\mathbb{C}((x))$ 是 D-有限的当且仅当由 $y,y',y'',\ldots$ 生成的 $\mathbb{C}(x)$ 上的向量空间是有限维的 (从而解释了名词 "D-有限").

(d) 证明所有 D-有限 Laurent 级数 $f\in\mathbb{C}((x))$ 的集合 $\mathcal{D}$ 构成 $\mathbb{C}((x))$ 的子代数, 即 $\mathcal{D}$ 对复系数线性组合和乘积都封闭.

(e) (更难) 证明 $\mathcal{D}$ 不是 $\mathbb{C}((x))$ 的一个子域.

26. (*) 一个 Laurent 级数 $y\in\mathbb{C}((x))$ 称为*代数的* (algebraic) 如果存在不全为 0 的多项式 $p_0(x),p_1(x),\ldots,p_d(x)\in\mathbb{C}[x]$, 使得

$$\begin{aligned}&p_d(x)y^d+p_{d-1}(x)y^{d-1}+\cdots+p_1(x)y+p_0(x)\\=&0.\end{aligned}\tag{12.10}$$

证明代数级数 y 是的.

27. (非常困难) 证明非零的 Laurent 级数 $f(x)\in\mathbb{C}((x))$ 和它的倒数 $1/f(x)$ 都是 D-有限的当且仅当 $f'(x)/f(x)$ 是代数的.

28. (a) (困难) 假设二元复系数幂级数 $F(x,y)=\sum_{m,n\geqslant 0} a_{mn}x^m y^n$ 也表示一个有理函数. 换句话说, 存在多项式 $P(x,y),Q(x,y)\in\mathbb{C}[x,y]$ 使得 $Q(x,y)F(x,y)=P(x,y)$. 证明幂级数 $\sum_{n\geqslant 0} a_{nn}x^n$, 称为 $F(x,y)$ 的*对角线* (diagonal), 是代数的.

(b) (困难) 设

$$F(x,y,z) = \frac{1}{1-x-y-z} = \sum_{k,m,n\geqslant 0} \frac{(k+m+n)!}{k!\,m!\,n!} x^k y^m z^n.$$

证明对角线级数 $\sum_{n\geqslant 0} \frac{(3n)!}{n!^3} x^n$ 不是代数的.

(c) (非常困难) 设幂级数 $F(x_1,\ldots,x_m) = \sum_{i_1,\ldots,i_m\geqslant 0} c_{i_1,\ldots,i_m} x_1^{i_1}\cdots x_m^{i_m}$ 也是 $\mathbb{C}$ 上有限个变元的有理函数 $P(x_1,\ldots,x_m)/Q(x_1,\ldots,x_m)$, 即分母 Q 与幂级数 F 的形式乘积等于分子 P. 证明 $F(x_1,\ldots,x_m)$ 的对角线是 D-有限的.

部分练习提示

第 1 章

1.5 考虑 $\boldsymbol{A}(H_n)^2$ 并应用练习 1.3.

1.6 (a) 先计算序列 $V_{i_0}, V_{i_1}, \ldots, V_{i_\ell}$ 的个数, 其中存在顶点依次为 $v_0, v_1, \ldots, v_\ell = v_0$ 的闭游动, 且满足 $v_j \in V_{i_j}$.

1.11 考虑 $\boldsymbol{A}(\Gamma)$ 的秩, 也考虑 $\boldsymbol{A}(\Gamma)^2$ 的秩. 答案很简单且不涉及无理数.

1.12 (b) 考虑 $\boldsymbol{A}(G)^2$.

第 2 章

2.2 见练习 9.5.

2.5 (c) 模仿对图 C_n 的证明, 应用定义

$$\langle \chi_u, \chi_v \rangle = \sum_{w \in \mathbb{Z}_n} \chi_u(w)\overline{\chi_v(w)},$$

其中上划线表示复共轭.

第 3 章

3.4 例 3.1 是很有用的.

3.7 不用线性代数更简单.

3.8 见上一个提示.

3.10 先证明 (简单) 如果从顶点 v 出发移动 n 步 (用我们的随机游动模型), 那么我们遍历一个固定闭游动 W 的概率就等于方向遍历 W 的概率.

3.12 见对练习 3.7 的提示.

第 4 章

4.4 (b) 方法之一是用两种方法计数 $\mathbb{F}_q^n$ 的线性无关 k 元组 $(v_1, \ldots, v_k)$ 的数目: (1) 先选 v_1, 然后选 v_2, 等等; (2) 先选由 $v_1, \ldots, v_k$ 生成的子空间 W, 再选 v_1, v_2, 等等.

4.4 (c) 最简单的方法是应用 (b).

第 5 章

5.5 (a) 证明对适当的群 G 有 $N_n \cong B_n/G$.

5.9 (a) 应用推论 2.4, 其中 $n = \binom{p}{2}$.

5.13 应用练习 5.12.

第 6 章

6.2 (b) 不是真正的提示, 但该结果等价于 [为什么] 练习 8.34 中 $r=m$, $s=n$, $t=2$, $x=1$ 的情形.

6.3 考虑 $\mu=(8,8,4,4)$.

6.5 先考虑 S 有 ζ 个等于 0 的元素 (故 $\zeta=0$ 或 1)、ν 个负元素和 π 个正元素的情形, 因而有 $\nu+\zeta+\pi=2m+1$.

第 7 章

7.16 (a) 应用 Pólya 定理.

第 8 章

8.3 将极大链转化为一个我们已经知道如何计数的结构.

8.7 考虑偏序集 Y_2 为所有分拆图可以被多米诺骨牌无重复覆盖的分拆所构成的集合, 序为分拆图的包含关系. 这显然是杨格 Y 的子偏序集. 证明 $Y_2\cong Y\times Y$.

8.14 对 n 归纳.

8.17 (a) 一个方法是应用 $\mathfrak{S}_n$ 的轮换指标的生成函数 $\sum_{n\geqslant 0}Z_{\mathfrak{S}_n}(z_1,z_2,\ldots)x^n$(定理 7.13). 另一个方法是找出一个用 $B(0),\ldots,B(n)$ 表示 $B(n+1)$ 的递推关系式, 然后将递推式转化为生成函数.

8.18 考虑生成函数

$$G(q,t)=\sum_{k,n\geqslant 0}\kappa(n\to n+k\to n)\frac{t^kq^n}{(k!)^2}$$

并应用等式 (8.25).

8.20 (b) 考虑 $Y_{j-1,j}$ 的邻接矩阵的平方.

8.24 应用练习 8.14.

第 9 章

9.1 基于公式 $\kappa(K_p)=p^{p-2}$, 有一个避免矩阵树定理的简单证明.

9.2 (c) 应用 $\boldsymbol{L}$ 的行和为 0 这一事实, 并计算 $\boldsymbol{L}$ 的迹.

9.5 (b) 应用练习 1.3.

9.6 (a) 最优美的证明是应用如下事实: 两个可交换的 $p\times p$ 矩阵 A 和 B 可以同时三角化, 即存在可逆矩阵 X 使得 XAX^{-1} 和 XBX^{-1} 都是上三角矩阵.

9.6 (d) 应用练习 9.8(a).

9.7 设 G^* 是 G 的全对偶图, 即 G^* 的顶点是 G 的面, 包含外部面. 对 G 的每条边 e 分开 G 的两个面 R 和 S, 在 G^* 中都有一条边 e^* 连接顶点 R 和 S. 因此 G^* 会有一些重

边, 且 $\#E(G) = \#E(G^*)$. 先用组合方法证明 $\kappa(G) = \kappa(G^*)$. (见推论 11.19.)

9.10 (a) 拉普拉斯矩阵 $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}(G)$ 作用在以 $V(G)$ 为基的实向量空间 $\mathbb{R}V(G)$ 上. 考虑 $\mathbb{R}V(G)$ 的有元素 $v + \varphi(v)$, $v \in V(G)$ 生成的子空间 W.

9.11 (a) 设 $s(n, q, r)$ 是 $\mathbb{F}_q$ 上秩为 r 的 $n \times n$ 对称矩阵的个数. 求 $s(n, q, r)$ 满足的一个递归关系, 并验证下式也满足该递归关系:

$$s(n,q,r) = \begin{cases} \displaystyle\prod_{i=1}^{t} \frac{q^{2i}}{q^{2i}-1} \cdot \prod_{i=0}^{2t-1}(q^{n-i}-1),\ 0 \leqslant r = 2t \leqslant n, \\ \displaystyle\prod_{i=1}^{t} \frac{q^{2i}}{q^{2i}-1} \cdot \prod_{i=0}^{2t}(q^{n-i}-1),\ \ 0 \leqslant r = 2t+1 \leqslant n. \end{cases}$$

9.12 第 9 章附录中三个证明中的任意一个都可用来证明本练习.

第 10 章

10.3 (b) 应用 Perron-Frobenius 定理 (定理 3.3).

10.6 (a) 考虑 A^{ℓ}.

10.6 (f) 存在一个 9 个顶点的非 de Bruijn 图的例子.

10.6 (c) 设 E 是 $\boldsymbol{A}(D)$ 的对应最大特征值的列特征向量. 考虑 $\boldsymbol{A}E$ 和 $\boldsymbol{A}^tE$, 其中 ^{t} 表示转置.

第 11 章

11.4 应用基矩阵 $\boldsymbol{C}_T$ 和 $\boldsymbol{B}_T$ 的幺模性.

11.6 (a) 模仿定理 9.8 (矩阵树定理) 的证明.

11.6 (b) 考虑 ZZ^t.

第 12 章

12.4 最好的策略涉及奇置换和偶置换的概念.

12.5 要得到最简单的答案, 不要用线性代数而是用最初的 Oddtown 定理.

12.12 斜对称矩阵的特征值是什么?

12.15 考虑这些集合和它们的元素之间的关联矩阵 M. 考虑两种情形: $\det M = 0$ 和 $\det M \neq 0$.

12.18 考虑 H 的前三行. 另一个方法是利用行变换来从行列式中提取 2 的一个大幂次因子.

12.21 最简单的方法是直接证明, 而不是用定理 12.18的证明.

12.23 先对生成函数 $\sum_{n \geqslant 0} f(n)x^n$ 找到一个简单的显式公式.

12.26 对 y 满足的等式 (12.10)关于 x 求导.

参考文献

[1] I. Anderson, *Combinatorics of Finite Sets*, Oxford University Press, Oxford-New York, 1987; Corrected republication by Dover, New York, 2002.

[2] G. E. Andrews, *The Theory of Partitions*, Addison-Wesley, Reading, 1976.

[3] G. E. Andrews and K. Eriksson, *Integer Partitions*, Cambridge University Press, Cambridge, 2004.

[4] L. Babai and P. Frankl, *Linear Algebra Methods in Combinatorics*, preliminary version 2 (1992), 216.

[5] E. A. Beem, Craige and Irene Schensted don't have a car in the world, in *Maine Times* (1982), pp. 20–21.

[6] E. A. Bender and D. E. Knuth, Enumeration of plane partitions, *J. Combinatorial Theory* **13** (1972), 40–54.

[7] E. R. Berlekamp, On subsets with intersections of even cardinality, *Canad. Math. Bull.* **12** (1969), 363–366.

[8] H. Bidkhori and S. Kishore, Counting the spanning trees of a directed line graph, Preprint [`arXiv:0910.3442`].

[9] E. D. Bolker, The finite Radon transform, in *Integral Geometry* (*Brunswick, Maine,* 1984), Contemp. Math. **63**, Amer. Math. Soc., Providence, 1987, pp. 27–50.

[10] C. W. Borchardt, Ueber eine der Interpolation entsprechende Darstellung der Eliminations–Resultante, *J. Reine Angew. Math.* (*Crelle's Journal*) **57** (1860), 111–121.

[11] R. C. Bose, A note on Fisher's inequality for balanced incomplete block designs, *Ann. Math. Stat.* (1949), 619–620.

[12] F. Brenti, Log-concave and unimodal sequences in algebra, combinatorics, and geometry: an update, in *Jerusalem Combinatorics '93*, Contemp. Math. **178**, Amer. Math. Soc., Providence, 1994.

[13] A. E. Brouwer and W. H. Haemers, *Spectra of Graphs*, Springer, New York, 2012.

[14] W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order*, Cambridge University Press, Cambridge, 1897.

[15] W. Burnside, *Theory of Groups of Finite Order*, second edition, Cambridge University Press, 1911; Reprinted by Dover, New York, 1955.

[16] Y. Caro, Simple proofs to three parity theorems, *Ars Combin.* **42** (1996), 175–180.

[17] N. Caspard, B. Leclerc, and B. Monjardet, in *Finite Ordered Sets*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, vol. 144, Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[18] A. L. Cauchy, Mémoire sur diverses propriétés remarquables des substitutions régulaires ou irrégulaires, et des systèmes de substitutions conjuguées (suite), *C. R. Acad. Sci. Paris* **21** (1845), 972–987; *Oeuvres* Ser. 1, vol. 9, 371–387.

[19] A. Cayley, Note sur une formule pour la réversion des séries, *J. reine angew. Math.* (= *Crelle's Journal*) **52** (1856), 276–284.

[20] A. Cayley, A theorem on trees, *Quart. J. Math.* **23** (1889), 376–378; *Collected Papers*, vol. 13, Cambridge University Press, Cambridge, 1897, pp. 26–28.

[21] E. Curtin and M. Warshauer, The locker puzzle, *Math. Intelligencer* **28** (2006), 28–31.

[22] D. M. Cvetković, M. Doob, and H. Sachs, *Spectra of Graphs: Theory and Applications*, 3rd ed., Johann Ambrosius Barth, Heidelberg/Leipzig, 1995.

[23] D. M. Cvetković, P. Rowlinson, and S. Simić, in *An Introduction to the Theory of Graph Spectra*, London Mathematical Society, Student Texts **75**, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.

[24] N. G. de Bruijn, A combinatorial problem, *Proc. Koninklijke Nederlandse Akademie v. Wetenschappen* **49** (1946), 758–764; *Indagationes Math.* **8** (1946), 461–467.

[25] N. G. de Bruijn, Pólya's theory of counting, in *Applied Combinatorial Mathematics* (E. F. Beckenbach, ed.), Wiley, New York, 1964; Reprinted by Krieger, Malabar, Florida, 1981.

[26] N. G. de Bruijn, Acknowledgement of priority to C. Flye Sainte-Marie on the counting of circular arrangements of 2^n zeros and ones that show each n-letter word exactly once, Technische Hogeschool Eindhoven, T.H.-Report 75-WSK-06, 1975.

[27] M. R. DeDeo and E. Velasquez, The Radon transform on $\mathbb{Z}_n^k$, *SIAM J. Discrete Math.* **18** (2004/2005), 472–478 (electronic).

[28] P. Diaconis and R. L. Graham, The Radon transform on $\mathbb{Z}_2^k$, *Pacific J. Math.* **118**

(1985), 323–345.

[29] P. Diaconis and R. L. Graham, *Magical Mathematics*, Princeton University Press, Princeton, 2012.

[30] E. B. Dynkin, Some properties of the weight system of a linear representation of a semisimple Lie group (in Russian), *Dokl. Akad. Nauk SSSR (N.S)* **71** (1950), 221–224.

[31] E. B. Dynkin, The maximal subgroups of the classical groups, in *Amer. Math. Soc. Transl., Ser. 2* **6** (1957), 245–378. Translated from *Trudy Moskov. Mat. Obsc.* **1**, 39–166.

[32] K. Engel, in *Sperner Theory*, Encyclopedia of Mathematics and Its Applications, 65, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[33] P. Fishburn, *Interval Orders and Interval Graphs: A Study of Partially Ordered Sets*, John Wiley & Sons, New York, 1985.

[34] R. A. Fisher, An examination of the different possible solutions of a problem in incomplete blocks, *Ann. Eugenics* **10** (1940), 52–75.

[35] C. Flye Sainte-Marie, Solution to question nr. 48, *l'Intermédiaire des Mathématiciens* **1** (1894), 107–110.

[36] S. Fomin, Duality of graded graphs, *J. Algebraic Combinatorics* **3** (1994), 357–404.

[37] S. Fomin, Schensted algorithms for dual graded graphs, *J. Algebraic Combinatorics* **4** (1995), 5–45.

[38] J. S. Frame, G. de B. Robinson, and R. M. Thrall, The hook graphs of S_n, *Canad. J. Math.* **6** (1954), 316–324.

[39] D. S. Franzblau and D. Zeilberger, A bijective proof of the hook-length formula, *J. Algorithms* **3** (1982), 317–343.

[40] F. G. Frobenius, Über die Congruenz nach einem aus zwei endlichen Gruppen gebildeten Doppelmodul, *J. Reine Angew. Math.* (*Crelle's Journal*) **101** (1887), 273–299; Reprinted in *Gesammelte Abhandlungen*, vol. 2, Springer-Verlag, Heidelberg, 1988, pp. 304–330.

[41] F. G. Frobenius, Über die Charaktere der symmetrischen Gruppe, in *Sitzungsber. Kön. Preuss. Akad. Wissen. Berlin* (1900), 516–534; *Gesammelte Abh. III* (J.-P. Serre, ed.), Springer-Verlag, Berlin (1968), pp. 148–166.

[42] W. E. Fulton, *Young Tableaux*, Student Texts **35**, London Mathematical Society, Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[43] A. Gál and P. B. Miltersen, The cell probe complexity of succinct data structures, in *Proceedings of the 30th International Colloquium on Automata, Languages and Programming (ICALP)*, 2003, 332-344.

[44] M. Gardner, Squaring the square, in *The 2nd Scientific American Book of Mathematical Puzzles and Diversions*, Simon and Schuster, New York, 1961.

[45] I. J. Good, Normally recurring decimals, *J. London Math. Soc.* **21** (1947), 167–169.

[46] R. L. Graham and H. O. Pollak, On the addressing problem for loop switching, *Bell System Tech. J.* **50** (1971), 2495–2519.

[47] R. L. Graham and H. O. Pollak, On embedding graphs in squashed cubes, in *Lecture Notes in Mathematics* **303**, Springer, New York, 1973, pp. 99-110.

[48] C. Greene, A. Nijenhuis, and H. S. Wilf, A probabilistic proof of a formula for the number of Young tableaux of a given shape, *Advances in Math.* **31** (1979), 104–109.

[49] J. I. Hall, E. M. Palmer, and R. W. Robinson, Redfield's lost paper in a modern context, *J. Graph Theory* **8** (1984), 225–240.

[50] F. Harary and E. M. Palmer, *Graphical Enumeration*, Academic Press, New York/London, 1973.

[51] F. Harary and R. W. Robinson, The rediscovery of Redfield's papers, *J. Graph Theory* **8** (1984), 191–192.

[52] G. H. Hardy, J. E. Littlewood, and G. Pólya, *Inequalities*, second ed., Cambridge University Press, Cambridge, 1952.

[53] L. H. Harper, Morphisms for the strong Sperner property of Stanley and Griggs, *Linear and Multilinear Algebra* **16** (1984), 323–337.

[54] T. W. Hawkins, The origins of the theory of group characters, *Arch. History Exact Sci.* **7** (1970/71), 142–170.

[55] T. W. Hawkins, Hypercomplex numbers, Lie groups, and the creation of group representation theory, *Arch. History Exact Sci.* **8** (1971/72), 243–287.

[56] T. W. Hawkins, New light on Frobenius' creation of the theory of group characters, *Arch. History Exact Sci.* **12** (1974), 217–243.

[57] A. P. Hillman and R. M. Grassl, Reverse plane partitions and tableaux hook numbers, *J. Combinatorial Theory (A)* **21** (1976), 216–221.

[58] R. A. Horn and C. R. Johnson, *Matrix Analysis*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[59] J. W. B. Hughes, Lie algebraic proofs of some theorems on partitions, in *Number Theory and Algebra* (H. Zassenhaus, ed.), Academic Press, New York, 1977, pp. 135–155.

[60] A. Hurwitz, Über die Anzahl der Riemannschen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten, *Math. Ann.* **55** (1902), 53–66.

[61] A. Joyal, Une théorie combinatoire des séries formelles, *Advances in Math.* **42** (1981), 1–82.

[62] N. D. Kazarinoff and R. Weitzenkamp, Squaring rectangles and squares, *Amer. Math. Monthly* **80** (1973), 877–888.

[63] G. Kirchhoff, Über die Auflösung der Gleichungen, auf welche man bei der Untersuchung der Linearen Vertheilung galvanischer Ströme geführt wird, *Ann. Phys. Chem.* **72** (1847), 497–508.

[64] C. Krattenthaler, Bijective proofs of the hook formulas for the number of standard Young tableaux, ordinary and shifted, *Electronic J. Combinatorics* **2** (1995), R13, 9pp.

[65] D. E. Knuth, Permutations, matrices, and generalized Young tableaux, *Pacific J. Math.* **34** (1970), 709–727.

[66] I. Krasikov and Y. Roditty, Balance equations for reconstruction problems, *Arch. Math. (Basel)* **48** (1987), 458–464.

[67] J. P. S. Kung, Radon transforms in combinatorics and lattice theory, in *Combinatorics and ordered sets (Arcata, Calif., 1985)*, Contemp. Math. **57**, Amer. Math. Soc., Providence, 1986, pp. 33–74.

[68] K. H. Leung and B. Schmidt, New restrictions on possible orders of circulant Hadamard matrices, *Designs, Codes and Cryptography* **64** (2012), 143–151.

[69] E. K. Lloyd, J. Howard Redfield: 1879–1944, *J. Graph Theory* **8** (1984), 195–203.

[70] L. Lovász, A note on the line reconstruction problem, *J. Combin. Theory Ser. B* **13** (1972), 309–310.

[71] L. Lovász, Random walks on graphs: a survey, in *Combinatorics. Paul Erdős is Eighty*, vol. 2, Bolyai Society Mathematical Studies **2**, Keszthely, Hungary, 1993, pp. 1–46.

[72] D. Lubell, A short proof of Sperner's lemma, *J. Combinatorial Theory* **1** (1966), 299.

[73] P. A. MacMahon, Memoir on the theory of the partitions of numbers — Part I, *Phil. Trans. Royal Soc. London (A)* **187** (1897), 619–673; *Collected Works*, vol. 1 (G. E.

Andrews, ed.), MIT, Cambridge, 1978, pp. 1026–1080.

[74] P. A. MacMahon, Memoir on the theory of the partitions of numbers — Part IV, *Phil. Trans. Royal Soc. London (A)* **209** (1909), 153–175; *Collected Works*, vol. 1 (G. E. Andrews, ed.), M.I.T. Press, Cambridge, Massachusetts, 1978, pp. 1292–1314.

[75] P. A. MacMahon, *Combinatory Analysis*, vols. 1 and 2, Cambridge University Press, Cambridge, 1915/1916; Reprinted in one volume by Chelsea, New York, 1960.

[76] J. Matoušek, *Thirty-three Miniatures*, American Mathematical Society, Providence, 2010.

[77] J. W. Moon, in *Counting Labelled Trees*, Canadian Math. Monographs, Vol. 1, Canadian Mathematical Congress, 1970.

[78] V. Müller, The edge reconstruction hypothesis is true for graphs with more than $n \log_2 n$ edges, *J. Combin. Theory Ser. B* **22** (1977), 281–283.

[79] P. M. Neumann, A lemma that is not Burnside's, *Math. Sci.* **4** (1979), 133–141.

[80] J.-C. Novelli, I. Pak, and A. V. Stoyanovskii, A new proof of the hook-length formula, *Discrete Math. and Theoretical Computer Sci.* **1** (1997), 053–067.

[81] K. M. O'Hara, Unimodality of Gaussian coefficients: a constructive proof, *J. Combin. Theory Ser. A* **53** (1990), 29–52.

[82] W. V. Parker, The matrices AB and BA, *Amer. Math. Monthly* **60** (1953), 316; Reprinted in *Selected Papers on Algebra* (S. Montgomery et al., eds.), Mathematical Association of America, Washington, pp. 331–332.

[83] J. Pitman, Coalescent random forests, *J. Combinatorial Theory Ser. A* **85** (1999), 165–193,

[84] G. Pólya, Kombinatorische Anzahlbestimmungen für Gruppen, Graphen und chemische Verbindungen, *Acta Math.* **68** (1937), 145–254.

[85] G. Pólya and R. C. Read, *Combinatorial Enumeration of Groups, Graphs, and Chemical Compounds*, Springer, New York, 1987.

[86] M. Pouzet, Application d'une propriété combinatoire des parties d'un ensemble aux groupes et aux relations, *Math. Zeit.* **150** (1976), 117–134.

[87] M. Pouzet and I. G. Rosenberg, Sperner properties for groups and relations, *European J. Combin.* **7** (1986), 349–370.

[88] R. A. Proctor, A solution of two difficult combinatorial problems with linear algebra, *Amer. Math. Monthly* **89** (1982), 721–734.

[89] H. Prüfer, Neuer Beweis eines Satzes über Permutationen, *Arch. Math. Phys.* **27** (1918), 742–744.

[90] J. Radon, Über die Bestimmung von Funktionen durch ihre Integralwerte längs gewisser Mannigfaltigkeiten, *Berichte über die Verhandlungen der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig* **69** (1917), 262–277; Translation by P. C. Parks, On the determination of functions from their integral values along certain manifolds, *IEEE Transactions on Medical Imaging* **5** (1986), 170–176.

[91] J. H. Redfield, The theory of group reduced distributions, *American J. Math.* **49** (1927), 433–455.

[92] J. H. Redfield, Enumeration by frame group and range groups, *J. Graph Theory* **8** (1984), 205–223.

[93] J. B. Remmel, Bijective proofs of formulae for the number of standard Young tableaux, *Linear and Multilinear Algebra* **11** (1982), 45–100.

[94] G. de B. Robinson, On the representations of S_n, *Amer. J. Math.* **60** (1938), 745–760.

[95] H. J. Ryser, *Combinatorial Mathematics*, Mathematical Association of America, Washington, 1963.

[96] B. E. Sagan, *The Symmetric Group*, second ed., Springer, New York, 2001.

[97] C. E. Schensted, Longest increasing and decreasing subsequences, *Canadian J. Math.* **13** (1961), 179–191.

[98] J. Schmid, A remark on characteristic polynomials, *Amer. Math. Monthly* **77** (1970), 998–999; Reprinted in *Selected Papers on Algebra* (S. Montgomery et al., ed.), Mathematical Association of America, Washington, pp. 332–333.

[99] C. A. B. Smith and W. T. Tutte, On unicursal paths in a network of degree 4, *Amer. Math. Monthly* **48** (1941), 233–237.

[100] E. Sperner, Ein Satz über Untermengen einer endlichen Menge, *Math. Z.* **27**(1) (1928), 544–548.

[101] R. Stanley, Weyl groups, the hard Lefschetz theorem, and the Sperner property, *SIAM J. Algebraic and Discrete Methods* **1** (1980), 168–184.

[102] R. Stanley, Differentiably finite power series, *European J. Combinatorics* **1** (1980), 175–188.

[103] R. Stanley, Quotients of Peck posets, *Order* **1** (1984), 29–34.

[104] R. Stanley, Differential posets, *J. Amer. Math. Soc.* **1** (1988), 919–961.

[105] R. Stanley, Unimodal and log-concave sequences in algebra, combinatorics, and geometry, in *Graph Theory and Its Applications: East and West*, Ann. New York Acad. Sci., vol. 576, 1989, pp. 500–535.

[106] R. Stanley, Variations on differential posets, in *Invariant Theory and Tableaux* (D. Stanton, ed.), The IMA Volumes in Mathematics and Its Applications, vol. 19, Springer, New York, 1990, pp. 145–165.

[107] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 1, 2nd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[108] R. Stanley, *Enumerative Combinatorics*, vol. 2, Cambridge University Press, New York, 1999.

[109] B. Stevens, G. Hurlbert, and B. Jackson, eds., Special issue on "Generalizations of de Bruijn cycles and Gray codes", *Discrete Math.* **309** (2009).

[110] K. Sutner, Linear cellular automata and the Garden-of-Eden, *Math. Intelligencer* **11** (1989), 49–53.

[111] J. J. Sylvester, On the change of systems of independent variables, *Quart. J. Math.* **1** (1857), 42–56; *Collected Mathematical Papers*, vol. 2, Cambridge, 1908, pp. 65–85.

[112] J. J. Sylvester, Proof of the hitherto undemonstrated fundamental theorem of invariants, *Phil. Mag.* **5** (1878), 178–188; *Collected Mathematical Papers*, vol. 3, Chelsea, New York, 1973, pp. 117-126.

[113] W. T. Trotter, *Combinatorics and Partially Ordered Sets: Dimension Theory*, Johns Hopkins Studies in the Mathematical Sciences **6**, Johns Hopkins University Press, Baltimore, 1992.

[114] R. J. Turyn, Character sums and difference sets, *Pacific J. Math.* **15** (1965), 319–346.

[115] R. J. Turyn, Sequences with small correlation, in *Error Correcting Codes* (H. B. Mann, ed.), Wiley, New York, 1969, pp. 195–228.

[116] W. T. Tutte, The dissection of equilateral triangles into equilateral triangles, *Proc. Cambridge Phil. Soc.* **44** (1948), 463–482.

[117] W. T. Tutte, Lectures on matroids, *J. Res. Nat. Bur. Standards Sect. B* **69** (1965), 1–47.

[118] W. T. Tutte, The quest of the perfect square, *Amer. Math. Monthly* **72** (1965), 29–35.

[119] T. van Aardenne-Ehrenfest and N. G. de Bruijn, Circuits and trees in oriented linear graphs, *Simon Stevin* (*Bull. Belgian Math. Soc.*) **28** (1951), 203–217.

[120] M. A. A. van Leeuwen, The Robinson-Schensted and Schützenberger algorithms, Part 1: new combinatorial proofs, Preprint no. AM-R9208 1992, Centrum voor Wiskunde en Informatica, 1992.

[121] E. M. Wright, Burnside's lemma: a historical note, *J. Combinatorial Theory* (*B*) **30** (1981), 89–90.

[122] A. Young, Qualitative substitutional analysis (third paper), *Proc. London Math. Soc.* (2) **28** (1927), 255–292.

[123] D. Zeilberger, Kathy O'Hara's constructive proof of the unimodality of the Gaussian polynomials, *Amer. Math. Monthly* **96** (1989), 590–602.

索引

C

D

K

L

M

N

T

U

V

W

Y

Z

代数组合论

游动、树、表及其他

“这本通俗易懂的教材提供了全面的入门知识。每章讨论不同的主题……Stanley强调知识的统一性，最后一章把所有主题联系起来。他选择的内容能激发学生的兴趣，引导读者深入学习……总之，强烈推荐给高年级本科生或研究生。”

——Choice

本书是代数组合的入门教材，主要内容包括图中的游动、Randon变换、偏序集的Sperner性质、杨图、杨表、矩阵树定理、有向树、定向树以及组合数学中的一些“珍宝”。作者将代数学中一些简单和基本的工具巧妙地应用到组合数学中，每章论述一个经典且有趣的主题，章末简要阐明所述问题产生的历史背景、相关故事以及现有的应用领域。最后精选的练习指出了相关问题进一步的发展方向。这一切都会让刚掌握代数知识的学生感到代数工具的强大力量和组合问题的迷人魅力，激发学生应用代数工具以及探索组合数学相关问题的兴趣。

作者简介

Richard P. Stanley 现任美国麻省理工学院数学系教授，是国际组合学界的领军人物之一。1971年获得美国哈佛大学博士学位，1988年当选美国艺术与科学院院士，1995年当选美国科学院院士。1975年获得工业与应用数学学会George Polya奖，2001年因两卷本《计数组合学》获得美国数学会Leroy P. Steele奖，2003年获得瑞典皇家科学院Rolf Schock奖，2006年受邀在国际数学家大会上作一小时学术报告。Stanley教授的研究成果清晰简明、深刻全面、极富创造力，促进了数学诸多方向的决定性进展。同时，他非常注重扶持和培养年轻学者，由他撰写的包括本书在内的教科书已成为国内外组合数学专业学生必读的经典范本。

Algebraic Combinatorics

Walks, Trees, Tableaux, and More



上架指导：数学/离散数学

ISBN 978-7-111-49782-0

9 787111 497820 >

定价：49.00元

投稿热线：(010) 88379604
客服热线：(010) 88379426 88361066
购书热线：(010) 68326294 88379649 68995259

华章网站：www.hzbook.com
网上购书：www.china-pub.com
数字阅读：www.hzmedia.com.cn

封面设计·杨宇梅